Devoir maison 1

à rendre pour le mercredi 14 septembre

Exercice

On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$P_0 = 2\,, \quad P_1 = X \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$$

1. Déterminer les polynômes P_2 et P_3 et donner leur factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, P_n est un polynôme de degré n tel que $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.
3. Pour tout $n \geq 1$, en déduire une expression simple de $P_n\left(2\cos(\theta)\right)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
4. Pour tout $n \geq 1$, déterminer les racines de P_n.
5. Pour tout $n \geq 1$, donner la factorisation de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

Problème

Partie A

Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} \text{ si } x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. (a) Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\varphi(x) = \ln(x) + x + 1$. Étudier les variations de φ. Établir que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution β, et que $0,2 \leq \beta \leq 0,3$.
   (b) Pour tout $x > 0$, exprimer $f'(x)$ à l'aide $\varphi(x)$ et en déduire les variations de f.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x) - f(x))$.
4. Construire $\mathcal{C}$ et Γ les courbes représentatives de f et de $x \longmapsto \ln(x)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie B

On se propose d'étudier l'équation $f(x) = n$ où n est un entier naturel non nul.

1. Montrer que cette équation admet une solution et une seule, notée α_n.
2. Comparaison de α_n à e^n.
   (a) Établir que $f(e^n) \leq n$ et en déduire que $\alpha_n \geq e^n$.
   (b) Prouver que la relation $f(\alpha_n) = n$ peut s'écrire sous la forme :
   $$\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n} \quad \textbf{(1)}$$
   (c) En déduire en utilisant **(1)**, que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$.
3. Comparaison de α_n à $e^n + n$. On écrit α_n sous la forme :
   $$\alpha_n = e^n(1+\varepsilon_n) \quad \text{où} \quad \varepsilon_n \geq 0 \quad \textbf{(2)}$$
   (a) À l'aide de **(1)**, exprimer $(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)$ en fonction de n.
   (b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq (1+t)\ln(1+t) - t \leq \dfrac{t^2}{2}$.
   (c) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n \leq ne^{-n} \leq \varepsilon_n + \dfrac{\varepsilon_n^2}{2}$, puis que :
   $$0 \leq ne^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{n^2}{2}e^{-2n} \quad \textbf{(3)}$$
   (d) À l'aide de **(2)** et **(3)**, donner un équivalent de $\alpha_n - e^n$ lorsque $n \to +\infty$.