Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°12 - A remettre le mercredi 8 mars 2017

« Aléa Géométrique N - Maximum de N variables aléatoires Exponentielles indépendantes. »

Dans cet exercice, a et b sont deux réels positifs et s un réel strictement compris entre 0 et 1.

1. (a) Établir la convergence de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^u + a}\,\mathrm{d}u$

(b) Calculer J *(on pourra commencer par calculer $a\,J$).*

On considère une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k>0}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$, indépendantes, suivant une même loi exponentielle de paramètre b. On considère également une variable aléatoire N définie sur ce même espace probabilisé, indépendante des Y_k, suivant une loi géométrique de paramètre s et de support $\mathbb{N}^*$. On admet que $Z = \max(Y_1, \ldots, Y_N)$ est une variable aléatoire à densité.

On rappelle que si $\omega \in \Omega$, alors $Z(\omega)$ est le plus grand des réels $Y_1(\omega), \ldots, Y_{N(\omega)}(\omega)$.

2. Soit j un entier strictement positif et t un réel positif.
Calculer la probabilité conditionnelle $P_{N=j}(Z \leq t)$.

3. (a) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire Z.

(b) Déterminer une densité de Z.

4. Montrer que Z admet une espérance et que $E(Z) = \dfrac{-\ln s}{b\,(1-s)}$.

5. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(0) = 1$ et $g(t) = \dfrac{t\,\exp(-t)}{1-\exp(-t)}$ si $t > 0$.

(a) Montrer que la fonction g est continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

(b) Établir pour tout $t \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité suivante :

$$g(t) = g(t)\,\exp\big(-(n+1)\,t\big) + \sum_{k=0}^{n} t\,\exp\big(-(k+1)\,t\big)$$

6. Justifier, pour tout entier naturel k, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} t\,\exp\big(-(k+1)\,t\big)\,\mathrm{d}t$ et la calculer.

7. Montrer alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

8. On admet que la somme de cette série est égale à $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la valeur moyenne de $E(Z)$ sur $]0,1[$ $\left(\textit{c'est à dire } \displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln s}{b\,(1-s)}\,ds\right)$ est égale à $\dfrac{\pi^2}{6\,b}$.