Corrigé du devoir n^o 4

PARTIE I : étude d'un premier exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} \frac12 & \frac14 & 0 \\ \frac12 & \frac12 & \frac12 \\ 0 & \frac14 & \frac12 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est bien positive et la somme des coefficients de chaque colonne est égale à 1 ; elle est donc stochastique. Par contre certains coefficients de A sont nuls donc A n'est pas strictement positive.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \iff \mathrm{rg}(A - \lambda\, I_3) < 3$.
$\mathrm{rg}(A-\lambda\, I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \frac12-\lambda & \frac14 & 0 \\ \frac12 & \frac12-\lambda & \frac12 \\ 0 & \frac14 & \frac12-\lambda \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \frac12 & \frac12-\lambda & \frac12 \\ \frac12-\lambda & \frac14 & 0 \\ 0 & \frac14 & \frac12-\lambda \end{pmatrix}$
$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \frac12 & \frac12-\lambda & \frac12 \\ 0 & \frac18-(\lambda-\frac12)^2 & \frac12(\lambda-\frac12) \\ 0 & \frac14 & \frac12-\lambda \end{pmatrix}$ Cette matrice est de rang strictement inférieur à 3 si et seulement si le rang de la matrice $\begin{pmatrix} \frac18-(\lambda-\frac12)^2 & \frac12(\lambda-\frac12) \\ \frac14 & \frac12-\lambda \end{pmatrix}$ est strictement inférieur à 2, c'est à dire si son déterminant est nul : $\begin{vmatrix} \frac18-(\lambda-\frac12)^2 & \frac12(\lambda-\frac12) \\ \frac14 & \frac12-\lambda \end{vmatrix} = \left(\dfrac12-\lambda\right)\left(\dfrac18-\left(\lambda-\dfrac12\right)^2+\dfrac18\right)$
$= -\left(\dfrac12-\lambda\right)\lambda\,(1-\lambda)$
On en déduit que $\boxed{\mathrm{Spec}(A) = \left\{0\,,\,1\,,\,\frac12\right\}}$
3. $A - I = \begin{pmatrix} -\frac12 & \frac14 & 0 \\ \frac12 & -\frac12 & \frac12 \\ 0 & \frac14 & -\frac12 \end{pmatrix}$ donc $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-I) \iff \begin{cases} -2\,x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ y - 2\,z = 0 \end{cases}$
Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(A-I) = \mathrm{Vect}\langle {}^t(1\,,\,2\,,\,1)\rangle}$
4. L'ensemble des vecteurs invariants de A est de dimension 1, donc il existe un unique vecteur de probabilité invariant : $X = {}^t\left(\frac14\,,\,\frac12\,,\,\frac14\right)$

PARTIE II : étude d'un second exemple

1. Soit $k \in [\![0\,,\,5]\!]$, $\forall x>0$, $\varphi\big(f_k\big)(x) = x^k + 2\,x^5\,P\left(\dfrac{1}{x^k}\right) = x^k + 2\,x^{5-k}$ donc $\forall k \in [\![0\,,\,5]\!]$, $\varphi\big(f_k\big) \in E$.
Soient P_1 et P_2 deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$\forall x>0$, $\varphi\big(\lambda\,P_1+P_2\big)(x) = \big(\lambda\,P_1+P_2\big)(x) + 2\,x^5\big(\lambda\,P_1+P_2\big)\left(\dfrac1x\right) = \lambda\left(P_1(x)+2\,x^5\,P_1\left(\dfrac1x\right)\right)+\left(P_2(x)+2\,x^5\,P_2\left(\dfrac1x\right)\right)$.
Cette égalité est vérifiée pour tout $x>0$, on a donc $\varphi(\lambda\,P_1+P_2) = \lambda\,\varphi(P_1)+\varphi(P_2)$, ceci est vrai pour tous $(P_1,\,P_2)\in E$ donc φ est linéaire. De ces deux résultats on déduit que
$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E}$$
Le calcul de $\varphi\big(f_k\big)$ effectué précédemment permet d'obtenir la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$:
$$M = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&2 \\ 0&1&0&0&2&0 \\ 0&0&1&2&0&0 \\ 0&0&2&1&0&0 \\ 0&2&0&0&1&0 \\ 2&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$
M est positive et la somme de chaque colonne vaut 3, donc $\dfrac13\,M$ est stochastique.

2. M est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

3. (a) $M^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, on constate qu'effectivement $M^2 = 2\,M + 3\,I_6$.

De cette égalité matricielle, on déduit $\varphi^2 = 2\,\varphi + 3\,\mathrm{Id_E}$.
Soient λ une valeur propre de φ et$P \in E$, une fonction de E qui est un vecteur propre pour φ.
On a : $\varphi(P) = \lambda\,P$, puis $\varphi^2(P) = \varphi(\lambda\,P) = \lambda\,\varphi(P) = \lambda^2 P$
On en déduit $\left(\lambda^2 - 2\,\lambda - 3\right)\,P = 0$ (fonction nulle sur $]0, +\infty[$). et comme P n'est pas la fonction nulle puisque c'est un vecteur propre, on a $\lambda^2 - 2\,\lambda - 3 = 0$ donc $\lambda \in \{-1, 3\}$.

(b) φ est diagonalisable et n'est pas une homothétie donc elle ne peut pas avoir qu'une valeur propre ; par conséquent φ admet deux sous-espaces propres associés respectivement à -1 et à 3 :

$$M + I_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On remarque que $C_1 = C_6$, $C_2 = C_5$ et $C_3 = C_4$ donc, en raisonnant sur φ, l'endomorphisme associé à M, on obtient que les fonctions $f_0 - f_5$, $f_1 - f_4$ et $f_2 - f_3$ sont des vecteurs propres associés à la valeur 1 ; ces 3 vecteurs forment une famille libre (le vérifier vous-même c'est immédiat) ainsi $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id_E})) \geqslant 3$

$$M - 3\,I_6 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

De même que $C_1 = -C_6$, $C_2 = -C_5$ et $C_3 = -C_4$ donc les fonctions $f_0 + f_5$, $f_1 + f_4$ et $f_2 + f_3$ sont des vecteurs propres associés à la valeur 3 ; ils forment à nouveau une famille libre, ainsi $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi - 3\,\mathrm{Id_E})) \geqslant 3$
Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut excéder la dimension de l'espace (ici 6) on en déduit : $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id_E})) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi - 3\,\mathrm{Id_E})) = 3$ et

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id_E})) = \mathrm{Vect}\langle f_0 - f_5,\ f_1 - f_4,\ f_2 - f_3\rangle \text{ et } \mathrm{Ker}(\varphi - 3\,\mathrm{Id_E})) = \mathrm{Vect}\langle f_0 + f_5,\ f_1 + f_4,\ f_2 + f_3\rangle}$$

Remarque : J'ai choisi de ne pas résoudre les systèmes d'équations pour calculer les noyaux de $\varphi + \mathrm{Id}$ et $\varphi - 3\,\mathrm{Id}$ car l'observation des colonnes des matrices donnait un résultat immédiat, on pouvait bien sûr faire un calcul *classique* :

Soit $X = {}^t(a, b, c, d, e, f) \in \mathscr{M}_{6,1}(\mathbb{R})$, $X \in \mathrm{Ker}(M + I_6) \iff \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & f & = & 0 \\ b & + & e & = & 0 \\ c & + & d & = & 0 \end{array}\right.$

On n'a que les 3 premières équations car les 3 suivantes sont identiques
On obtient de ce fait un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Ker}(M + I_6)$ et on termine en calculant une base de cet espace, par exemple $\{(1, 0, 0, 0, 0, -1)\,,\ (0, 1, 0, 0, -1, 0)\,,\ (0, 0, 1, -1, 0, 0)\}$, ce qui, en repassant à φ, redonne la base calculée précédemment.
Pour le sous-espace associé à 3, le système d'équations obtenu est :
$\left\{\begin{array}{ccccc} a & - & f & = & 0 \\ b & - & e & = & 0 \\ c & - & d & = & 0 \end{array}\right.$, la méthode est identique.

(c) Une matrice diagonale semblable à M est par exemple $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, pour cette matrice D une matrice de passage P s'obtient en juxtaposant les colonnes des vecteurs propres calculés précédemment, ceux associés à la valeur -1, puis à la valeur 3 : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé, on peut cependant constater qu'ici $P^{-1} = \dfrac{{}^tP}{2}$.

PARTIE III : existence d'un vecteur de probabilité invariant

1. (a) Chaque ligne de ${}^tQU$ est la somme des termes des lignes de ${}^tQ$ (donc la somme des colonnes de Q) et vaut donc 1.

   (b) **Rappel :** pour A et B deux matrices quelconques telles que le produit $A\,B$ a un sens, on a ${}^t(A\,B) = {}^tB\,{}^tA$. Donc si $Q - I_N$ est inversible d'inverse R, alors $({}^tQ - I_N) \cdot ({}^tR) = {}^t(R\,(Q - I_N)) = I$
   Ainsi ${}^tQ - I_N$ est inversible, d'inverse ${}^tR$; il s'agit en fait d'une équivalence du fait que ${}^t({}^tQ - I_N) = Q - I_N$

   (c) Comme ${}^tQU = 1U$ avec $U \neq 0$ alors 1 est valeur propre de ${}^tQ$.
   Par conséquent ${}^tQ - I_N$ n'est pas inversible, donc $Q - I_N$ non plus d'après la question précédente, en conclusion : $\boxed{\text{1 est valeur propre de } Q.}$

2. (a) Soit λ une valeur propre réelle de Q telle que $|\lambda| = 1$ et $V \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Q associé à la valeur propre λ.

   Si $\lambda = 1$ alors $QV = V$ et dans chaque ligne i, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} Q_{i,j} v_j = v_i$ donc

   $$|v_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} Q_{i,j} v_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |Q_{i,j} v_j| = \sum_{j} Q_{i,j}\,|v_j| \text{ donc } \sum_{j=1}^{n} Q_{i,j}\,|v_j| - |v_i| \geqslant 0.$$

   De même si $\lambda = -1$ car $|-v_i| = |v_i|$, donc chaque composante du vecteur $Q\,|V| - |V|$ est positive, en conclusion :

   $$\boxed{\text{Si } V \text{ est un vecteur propre de } Q \text{ associé à } \lambda = \pm 1 \text{ alors } Q\,|V| - |V| \text{ est positif}}$$

   (b) La somme des composantes de $Q\,|V|$ est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q_{i,j}\,|v_j|$ en inversant les sommes, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q_{i,j}\,|v_j| = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{i,j}\right)|v_j|$, ce qui fait apparaitre $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} Q_{i,j} = 1$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q_{i,j}\,|v_j| = \sum_{j=1}^{n} |v_j| = ||V||_1$

   $$\boxed{\text{Ainsi la somme des composantes du vecteur } Q\,|V| - |V| \text{ est nulle.}}$$

   (c) Dans les deux questions précédentes on a prouvé : $Q\,|V| - |V|$ est un vecteur positif, et la somme de ses composantes est nulle, on en déduit alors : $Q\,|V| - |V|$ est nul donc $|V|$ est un vecteur invariant par Q. V est un vecteur propre donc n'est pas le vecteur nul, ainsi $\|V\|_1 \neq \vec{0}$ et on obtient un vecteur de probabilité invariant par Q en considérant le vecteur $\dfrac{|V|}{\|V\|_1}$.

PARTIE IV : un troisième exemple (le PageRank de Google)

A : étude de la matrice de Google

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ puis $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

2. Pour tout i et j, $A\,(i,j) \geqslant 0$ et $\frac{(1-\rho)}{N} > 0$ car $\rho \in [0,1[$ donc $\rho A\,(i,j) + \frac{(1-\rho)}{N} > 0$

   Conclusion : $\boxed{G \text{ est une matrice strictement positive.}}$

3. Soit $j \in [\![1, ..., N]\!]$ tel que $d_j = 0$, alors $A(i,j) = 0$ si $i \neq j$ et $A(j,j) = 1$ donc $G(i,j) = \frac{(1-\rho)}{N}$ si $i \neq j$ et $G(j,j) = \rho + \frac{(1-\rho)}{N}$

   Ainsi $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} G(i,j) = \underbrace{\rho + \frac{(1-\rho)}{N}}_{G(j,j)} + (N-1)\underbrace{\frac{(1-\rho)}{N}}_{G(i,j),\, i\neq j} = 1$

   Soit à présent $j \in [\![1, ..., N]\!]$ tel que $d_j > 0$, alors $G(i,j) = \frac{(1-\rho)}{N}$ si j ne pointe pas vers i et $G(i,j) = \frac{(1-\rho)}{N} + \frac{\rho}{d_{i,j}}$ si j pointe vers i.

   On réalise une partition de $[\![1, ..., N]\!]$ en deux sous ensembles : A l'ensemble des indices de $[\![1, ..., N]\!]$ tels que j pointe vers i et $\overline{A}$ l'ensemble des indices tels que j ne pointe pas vers i.

   $$\sum_{i=1}^{N} G(i,j) = \sum_{i\in A} G(i,j) + \sum_{i\in\overline{A}} G(i,j) = d_{i,j}\left(\frac{1-\rho}{N} + \frac{\rho}{d_{i,j}}\right) + (N - d_{i,j})\left(\frac{1-\rho}{N}\right) = 1$$

   $$\boxed{\text{Dans tous les cas } \sum_{i=1}^{N} G(i,j) = 1\text{, de plus } G \text{ est strictement positive donc } G \text{ est une matrice stochastique}}$$

4. Résoudre le système $(\mathcal{S})$ revient à trouver un vecteur de probabilité invariant par M, or on a prouvé partie III l'existence d'un tel vecteur et on admet l'unicité, il s'ensuit que $(\mathcal{S})$ admet effectivement une solution unique.

B : modèle du surfeur sur le Web

1. Les composantes de V_n sont des probabilités donc positives, ainsi V_n est un vecteur positif ; d'autre part la somme de ses composantes vaut 1 puisque c'est la somme des valeurs d'une loi de probabilité d'une variable aléatoire.

   $$\boxed{V_n \text{ est bien un vecteur de probabilité.}}$$

2. Pour n donné, les événements $[X_n = j]_{1\leqslant j\leqslant N}$ forment un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales :

   $$\forall i \in [\![1, N]\!],\ P(X_{n+1} = i) = \sum_{j=1}^{N} P(X_{n+1} = i | X_n = j) \times P(X_n = j) = \sum_{j=1}^{N} G(i,j) \times P(X_n = j),$$

   la i^{e} composante de V_{n+1} est égale à la i^{e} composante du produit matriciel $G\,V_n$ donc $V_{n+1} = G\,V_n$.

3. Par récurrence sur n, on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = G^n\,V_0$

4. La limite de $P(X_n = j)$ est égale à la j^{e} composante du vecteur limite V_∞, qui est l'unique vecteur de probabilité invariant par G, ou encore la j^{e} composante de l'unique N-uplet solution du système $\mathcal{S}$.

PARTIE V : méthode de la puissance pour calculer V_∞

A : valeurs propres de Q

1. Pour tout vecteur $V \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ la $i^{ème}$ ligne de QV est $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\, v_j$

   or $\displaystyle\left|\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\, v_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\,|v_j|$ (avec$Q(i,j) \geqslant 0$)

   $\displaystyle\|QV\|_1 = \sum_{i=1}^{N}\left|\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\, v_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} Q(i,j)\,|v_j| = \sum_{j=1}^{N} |v_j| \sum_{i=1}^{N} Q(i,j) = \sum_{j=1}^{N} |v_j|$ car $\forall j,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} Q(i,j) = 1$ *(matrice stochastique)* finalement

   $$\boxed{\|QV\|_1 \leqslant \|V\|_1}$$

   Si V est positif, alors tous les termes de la somme sont positifs, donc l'inégalité triangulaire devient une égalité, et l'on a $\boxed{\|QV\|_1 = \|V\|_1}$

2. Tout vecteur propre V de Q, comme tout vecteur, vérifie $\|Q\,V\|_1 \leqslant \|V\|_1$ or en tant que vecteur propre $Q\,V = \lambda\,V$ et $\|QV\|_1 = |\lambda|\,\|V\|_1$ ainsi comme V est non nul, $\|V\|_1 \neq 0$ et $|\lambda| \leqslant 1$.

3. (a) D'après le rappel de l'énoncé, $|V|$ est un vecteur de probabilités invariant par Q.

    Donc $Q\,|V| = |V|$ et pour la 1ère composante : $\sum\limits_{j=1}^{N} Q\,(1,j)\,|v_j| = |v_1|$.

    Comme V est associé à λ, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} Q\,(1,j)\,v_j = \lambda v_1$ donc $\left|\sum\limits_{j=1}^{N} Q\,(1,j)\,v_j\right| = |v_1|$

    Conclusion : $\boxed{\left|\sum\limits_{j=1}^{N} Q\,(1,j)\,v_j\right| = \sum\limits_{j=1}^{N} Q\,(1,j)\,|v_j|}$

   (b) $$\left(\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)|v_j|\right)^2 - \left(\left|\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)v_j\right|\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)|v_j|\right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)v_j\right)^2 = 0$$
    $$= \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant N\\ 1\leqslant k\leqslant N\\ j\neq k}} Q(1,j)Q(1,k)\big(|v_j||v_k| - v_jv_k\big)$$

    Or $|v_j||v_k| - v_jv_k$ est toujours un nombre positif ou nul, on a donc une somme de nombres positifs qui est égale à 0, ainsi $\forall (j,k) \in [\![1,N]\!]^2,\ |v_j||v_k| = v_j\,v_k$ ce qui revient à dire que les produits $v_j\,v_k$ sont tous positifs donc que les v_j sont tous de même signe et que $V = \pm\,|V|$..

   (c) Le sous espace propre associé à 1 étant un espace vectoriel, V en est également élément.

    Donc V est associé à a valeur propre 1.

    Conclusion : $\boxed{\lambda = 1 \ (-1 \text{ n'est pas valeur propre})}$

B : convergence vers le vecteur de probabilité invariant

1. V_0 est un vecteur de probabilité donc $\|V_0\|_1 = 1$

   On va montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N},\quad Q^nV_0$ est un vecteur de probabilité, donc entre autres de norme 1.

   Par hypothèse c'est vrai pour $n = 0$ puisque $Q^0 = I_N$ et que V_0 est un vecteur de probabilité.

   Soit à présent $n \geqslant 0$, on suppose que Q^nV_0 est un vecteur de probabilité, c'est à dire à coordonnées positives et de norme 1.

   On pose $V_n = Q^nV_0$, V_n est donc un vecteur de probabilité, on remarque que $Q^{n+1}V_0 = Q\,V_n$; notons $(v_1^n, \ldots, v_N^n)$ les coordonnées de V_n

   La i^{e} composante de $Q\,V_n$ est égale à $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\,v_j^n$; c'est une somme de termes tous positifs, donc V_{n+1} est un vecteur à coordonnées positives.

   Donc $\displaystyle\|Q\,V_n\|_1 = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\,v_j^n\right) = \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N} Q(i,j)\,v_j^n\right) = \sum_{j=1}^{N}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{N} Q(i,j)}_{=1}\right)v_j^n = \sum_{j=1}^{N} v_j^n = 1$

   On a ainsi prouvé que si V_n est donc un vecteur de probabilité, alors V_{n+1} aussi, donc en particulier $\|V_{n+1}\|_1 = 1$.

   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \|Q^n\,V_0\|_1 = 1}$

2. Q est diagonalisable par hypothèse donc il existe une base de vecteurs de $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$, propres pour Q, soit $\mathcal{C} = (W_1, \ldots, W_N)$; ainsi V_0 se décompose dans cette base et il existe des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ tels que $V_0 = \alpha_1W_1 + \cdots + \alpha_NW_N$.

3. (a) En notant P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, on a $Q = P\,D\,P^{-1}$ où D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$.

    Le vecteur colonne associé à V_0 dans la base $\mathcal{C}$ est $P^{-1}V_0 = {}^t(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ et par récurrence sur n on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ Q^nV_0 = P\,D^n\,P^{-1}V_0$; or $D^n\,P^{-1}V_0 = {}^t(\lambda_1^n\,\alpha_1, \lambda_2^n\,\alpha_2, \ldots, \lambda_N^n\,\alpha_N) = {}^t(\alpha_1, \lambda_2^n\,\alpha_2, \ldots, \lambda_N^n\,\alpha_N)$ puisque $\lambda_1 = 1$.

Comme $|\lambda_2|, \ldots, |\lambda_N|$ sont tous strictement inférieurs à 1, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_j^n\, \alpha_j = 0$ pour tout $j \in [\![2, N]\!]$.

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} P\, D^n\, P^{-1} V_0 = P\,{}^t(\alpha_1,\, 0, \ldots,\, 0) = \alpha_1\, W_1$ par définition de la matrice de passage P.

(b) W_1 est un vecteur propre associé à la valeur 1, d'autre part pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q^n V_0$ est de norme 1 d'après la première question, donc par passage à la limite $\alpha_1\, W_1$ est également positif et de norme 1, c'est donc un vecteur de probabilité invariant par Q. Comme on a prouvé son existence et admis son unicité, il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} Q^n V_0 = \alpha_1\, W_1 = V_\infty$