2 B.C.P.S.T – VÉTO 2 Vendredi 3 octobre 2014

Développements limités

1. Déterminer un développement limité à l'ordre quatre au voisinage de zéro, des fonctions suivantes :
   - (a) $f(x) = \cos x - e^x$
   - (b) $f(x) = \ln(1-x) + \sin(2\,x)$
   - (c) $f(x) = \sin x\,\cos x$
   - (d) $f(x) = \sqrt{1-2\,x}\,\ln(1+2\,x)$
   - (e) $f(x) = (e^{-x}-1)\,(\sin\,2\,x)$
   - (f) $f(x) = [x - \ln(1+x)][e^x - \cos x]$
   - (g) $f(x) = \text{Arctan}\ x$
   - (h) $f(x) = \text{Arcisn}\ x$
   - (i) $f(x) = e^{e^x}$
   - (j) $f(x) = e^{2\cos x}$
   - (k) $f(x) = \ln(2+x)$
   - (l) $f(x) = \ln(1+x+\sqrt{1+x})$
   - (m) $f(x) = (1+x)^x$
   - (n) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$
   - (o) $f(x) = \tan x$ (à l'ordre 5)
   - (p) $f(x) = (\sin x)^3$ (à l'ordre 5)
   - (q) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$
   - (r) $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{1!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)$ à l'ordre n puis à l'ordre $n+1$.

2. Déterminer les limites suivantes :
   - (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1}$
   - (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x + 4\sin^3 x - 3\ln(1+x)}{(e^x-1)\sin x}$
   - (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\tan 4x - 4\tan 3x}{3\sin 4x - 4\sin 3x}$.
   - (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$
   - (e) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(2^x+3^x-12)^{\tan\frac{\pi x}{4}}$
   - (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$
   - (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\text{Arctan}\ (1+x)-\text{Arctan}\ (1-x)}$
   - (h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+2\,x+4}-(x+1)$
   - (i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(a^x)^{b^x}\quad (a,b)\in(\mathbb{R}^*)^2$
   - (j) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{a}{1-x^a}-\frac{b}{1-x^b}\right)\ (a,b)\in(\mathbb{R}^*)^2$

3. soit f définie sur $]-1\,,+\infty[\backslash\{0\}$ par $f\,:\,x\longmapsto\dfrac{x^2}{\ln(1+x)-x}$
   - (a) Utiliser les développements limités pour calculer la limite de f en 0 et montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0 (on notera encore f le prolongement).
   - (b) Déterminer le nombre dérivé de f en 0 et préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

4. Étude au voisinage de 1 de $f\,:\,x\longmapsto\dfrac{x^2-1}{\text{Arctan}\,x-(\pi/4)}$

5. On considère l'équation différentielle $y' = 1+y^2$; soit f une solution définie sur un intervalle I.
   - (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
   - (b) On suppose que $f(0)=0$; déterminer un développement limité de f à l'ordre 5 au voisinage de 0.
   - (c) En déduire le développement limité de la fonction tangente à l'ordre 5 au voisinage de 0.

6. (a) Soit $f\in\mathcal{C}^2(]-1\,;1[)$, rappeler pourquoi f admet un développement limité d'ordre deux au voisinage de 0.
   - (b) Calculer $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(2\,h)+f(0)-2\,f(h)}{h^2}$.

7. Déterminer les développements limités à l'ordre trois au voisinage de a des fonctions suivantes :
   - (a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, $a=1$
   - (b) $f(x) = \cos x$, $a=\pi/3$
   - (c) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a=2$
   - (d) $f(x) = \tan x$, $a=\pi/4$

8. Déterminer les développements limités en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :
   - (a) $f(x) = \text{Arctan}\ (x)$
   - (b) $f(x) = \exp((x+2)/x)$
   - (c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}-x$
   - (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$

9. Soit f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation différentielle : $y' = 1+y+y^2$
   (on a donc : $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ f'(x) = 1+f(x)+[f(x)]^2$)

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) On suppose de plus que $f(0) = 0$; montrer que f admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0, et le déterminer à l'ordre 4.

10. Étudier les branches infinies des courbes représentant les fonctions suivantes :

    (a) $f_1 : x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

    (b) $f_2 : x \longmapsto x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

    (c) $f_3 : x \longmapsto \sqrt{x^2+3x-3}$

    (d) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x(e^{1/x}-1)}$

11. Soit f une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation différentielle :
    $f'(x) = 1 + f(x) + f(x)^2$.

    (a) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

    (b) On suppose de plus que $f(0) = 0$. Démontrer que f admet un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 qu'on explicitera.

12. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = (x^2-1)\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$;

    (a) Former un développement limité à l'ordre deux, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ de $\dfrac{f(x)}{x}$.

    (b) En déduire :
    — les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
    — l'existence d'une asymptote pour $\mathcal{C}_f$ ainsi que son équation.
    — la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

    (c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

    (d) On suppose de plus que $f(0) = 0$; montrer que f admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0, et le déterminer à l'ordre 4.

13. **Étude de fonction** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+2x+4} - x - 2$.

    (a) Étudier les variations de f ; quelles sont les limites de f en $+\infty$ en $-\infty$?

    (b) Préciser pour quelle raison f admet un développement limité à l'ordre 1 en $+\infty$; le déterminer. Que peut-on en déduire concernant $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f ?

    (c) i. Déterminer un équivalent de f en $-\infty$.

        ii. Calculer le $\mathrm{dl}_1(-\infty)$ de $\dfrac{f(x)}{x}$; en déduire que $\mathcal{C}_f$ admet en $-\infty$ une droite asymptote Δ dont on donnera l'équation. Quelles sont les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et Δ ?

    (d) Tracer $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes dans un repère orthonormé.