## EXERCICE - 1

QCM : *pour chaque question une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.*
*Chaque bonne réponse rapporte 0,75 point, chaque erreur enlève 0,75 point, l'absence de réponse vaut 0 point.*
*Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.*
Vous répondrez sur votre copie en indiquant le numéro de la question et la lettre correspondant à votre réponse.

**1.** L'équation $e^{2x} - 3e^{x} - 4 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** 0 solution | **b.** 1 solution | **c.** 2 solutions | **d.** plus de 2 solutions |

**2.** L'expression $-e^{-x}$ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** n'est jamais négative | **b.** est toujours négative | **c.** n'est négative que si $x$ est positif | **d.** n'est négative que si $x$ est négatif |

**3.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2e^{x} - 1}{e^{x} + 2} =$ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** $\dfrac{1}{2}$ | **b.** 1 | **c.** 2 | **d.** $+\infty$ |

**4.** L'équation différentielle $y = 2y' - 1$ a pour ensemble de solutions :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** $x \longmapsto ke^{2x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$ | **b.** $x \longmapsto ke^{\frac{1}{2}x} + 1$ avec $k \in \mathbb{R}$ | **c.** $x \longmapsto ke^{\frac{1}{2}x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$ | **d.** $x \longmapsto ke^{2x} + \dfrac{1}{2}$ avec $k \in \mathbb{R}$ |

## EXERCICE - 2

On définit sur $\mathbb{N}$ les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ par :
$u_0 = 0$, $v_0 = 12$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

**1.** On considère la suite $(w_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par : $w_n = v_n - u_n$.
Montrer que la suite $(w_n)$ est géométrique.

**2.** Donner l'expression de $w_n$ en fonction de l'entier naturel $n$.

**3.** Déterminer la limite de la suite $(w_n)$.

**4.** Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

**5.** Etudier le sens de variation de la suite $(v_n)$.

**6.** Que peut-on déduire des résultats précédents quand à la convergence des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ?

**7.** On considère la suite $(t_n)$, définie pour tout entier naturel $n$, par : $t_n = 3u_n + 4v_n$.
Montrer que la suite $(t_n)$ est constante.

**8.** Déterminer les limites des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

**EXERCICE - 3**

Un million de bactéries sont introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$.
Soit $g(t)$ le nombre de bactéries, exprimé en millions, à l'instant $t$, exprimé en heures. On a donc $g(0) = 1$.
On a établi que la fonction $g$, définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$, est une solution de l'équation différentielle $(E)$ : $y' = 1,2y\,(1-0,2y)$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0)$ : $y' = -1,2y + 0,24$.

2. On admet que $g$ ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$ et on pose $h = \dfrac{1}{g}$.
   Montrer que $g$ est solution de l'équation différentielle $(E)$ si et seulement si $h$ est solution de l'équation différentielle $(E_0)$.

3. Déduire des questions précédentes que la fonction $g$ est définie, sur $[0\,;+\infty[$, par : $g(t) = \dfrac{1}{0,2+0,8\mathrm{e}^{-1,2t}}$.

4. Déterminer le sens de variation de $g$.

5. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(t)$. Interpréter ce résultat.

6. Déterminer l'instant $t$ où la population de bactéries aura doublé ?

**EXERCICE - 4**

**– Partie A –**

Soit $f_1$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_1(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$ et $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Soit $g_1$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g_1(x) = x^2 - 1 + \ln x$.
   Etudier les variations de la fonction $g_1$.
   Calculer $g_1(1)$, en déduire le signe de $g_1(x)$ suivant les valeurs de $x$.

2. Calculer les limites de $f_1$ en 0 et en $+\infty$.

3. Etudier les variations de $f_1$.

4. Montrer que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_1$ en $+\infty$.
   Etudier la position relative de $\mathscr{C}_1$ par rapport à $\mathscr{D}_1$.
   $\mathscr{C}_1$ admet-elle une autre asymptote ?

**– Partie B –**

Pour tout entier naturel non nul $n$, on définit sur $]0\,;+\infty[$ la fonction $f_n$ par : $f_n(x) = x - n - n\dfrac{\ln x}{x}$ et on nomme $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Soit $g_n$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g_n(x) = x^2 - n + n\ln x$.
   - **a)** Etudier les variations de la fonction $g_n$.
   - **b)** Déterminer ses limites en 0 et en $+\infty$. Dresser son tableau de variation.
   - **c)** Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha_n$ et que : $\alpha_n \in [1\,;\mathrm{e}]$.
   - **d)** Déterminer le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de $x$.

2. Déterminer les limites de $f_n$ en 0 et en $+\infty$.

3. Calculer $f'_n(x)$ et justifier que $f'_n(x)$ a le signe de $g_n(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
   Etudier les variations de $f_n$ et dresser son tableau de variation.

4. Montrer que $\mathscr{C}_n$ admet une asymptote oblique $\mathscr{D}_n$.