Terminale S
Exercices du livre
Chapitre 7
Intégrales, primitives

February 28, 2009

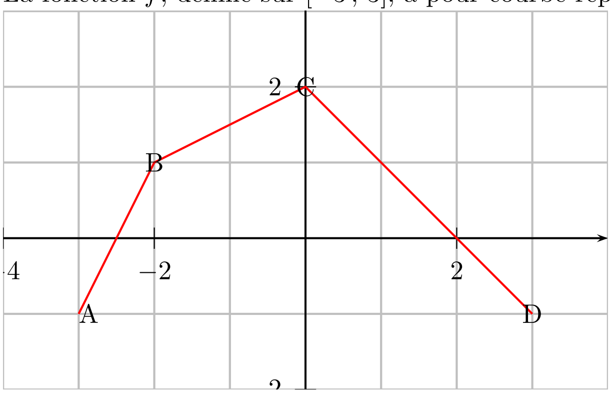
Contents

Exercices d'entraînement

1. Aires et intégrales

1 - 1. Exercice 2 p 206

La fonction f, définie sur $[-3\,;\,3]$, a pour courbe représentative la courbe ci-dessous :



1. Interpréter graphiquement et déduire les valeurs des intégrales suivantes :

   (a) $I = \displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$;

   (b) $I = \displaystyle\int_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$;

   (c) $I = \displaystyle\int_{2}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x$;

   (d) $I = \displaystyle\int_{-3}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. (a) Quelle est la valeur moyenne de f sur $[0\,;\,2]$?
   (b) Quelle est la valeur moyenne de f sur $[-3\,;\,3]$?

3. Le repère est orthonormal et l'unité graphique est égale à 0,8 cm.
   Que vaut, en cm^2, l'aire de la surface limitée par la courbe représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-2$ et $x=2$?

2. Recherche de primitives

2 - 1. Exercice 8 p 207

Donner une primitive des fonctions :

1. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$
2. $f(x) = (x+3)^2$
3. $f(x) = (2x+3)^4$
4. $f(x) = (4-x)^3$
5. $f(x) = 3x(x^2+1)^4$
6. $f(x) = x^2(x^3+1)^{2007}$

3. Calcul d'intégrales

3 - 1. Exercice 21 p 208

Calculer les intégrales :

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^4 t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x$
6. $I_6 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

3 - 2. Exercice 22 p 208

Calculer les intégrales proposées en utilisant une primitive.

1. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \left(2^t + 2^{-t}\right)\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3^t+1}{4^t}\mathrm{d}t$;
3. $\displaystyle\int_1^4 x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x$;
4. $\displaystyle\int_1^9 (x+1)\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

3 - 3. Exercice 24 p 208

On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^x \cos^2 t\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t$.
Calculer $\mathrm{I}+\mathrm{J}$ et $\mathrm{I}-\mathrm{J}$.
En déduire I et J.

3 - 4. Exercice 25 p 208

Soit les fonctions f et g définies sur $[0\,;\,1]$ par $f(x)=x^2(1-x)^3$ et $g(x)=x^3(1-x)^2$.
On désigne par C_f et C_g les courbes de f et de g dans un repère orthonormal.

1. (a) Vérifier que pour tout x de $[0\,;\,1]$: $f(x)=g(1-x)$.
   (b) Que peut-on en déduire pour les points $M(x;f(x))$ et $N(1-x;g(1-x)$? et pour les courbes C_f et C_g ?
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$
   (a) à l'aide de la question 1 ;
   (b) par le calcul.

4. Intégration par parties

4 - 1. Exercice 26 p 208

Calculer les intégrales proposées, en utilisant une ou plusieurs intégrations par parties.

1. $\displaystyle\int_{-2}^{3}\mathrm{e}^x(x+1)\mathrm{d}x$;
2. $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

4 - 2. Exercice 28 p 208

Calculer, en utilisant une ou plusieurs intégrations par parties :

$$\int_1^e \frac{\ln(t+1)}{(t+1)^2}\mathrm{d}t.$$

4 - 3. Exercice 29 p 208

Calculer les intégrales proposées, en utilisant une ou plusieurs intégrations par parties.

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x$;
2. $\displaystyle\int_0^{\pi}(x^2+1)\cos x\mathrm{d}x$.

4 - 4. Exercice 30 p 208

On pose $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I en fonction de J puis J en fonction de I.
2. En déduire I et J.

4 - 5. Exercice 31 p 208

Soit $I_n=\displaystyle\int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+2}}\frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_n à l'aide d'une intégration par parties.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}.I_n$.

5. Calculs d'aires et valeur moyenne d'une fonction

5 - 1. Exercice 33 p 209

1. Dans un repère orthonormal (unité graphique 2 cm), dessiner la parabole (P) d'équation $y=x^2-3x$ et la droite (d) d'équation $y=\dfrac{1}{2}x$.
2. Calculer l'aire, en cm^2, de la portion de plan limitée par la parabole, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=3$.
3. (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (d) et (P).
   (b) On pose $\mathrm{I}=4\displaystyle\int_0^{\frac{7}{2}}\left(\frac{7}{2}x-x^2\right)\mathrm{d}x$. Calculer I. De quelle portion du plan I représene-t-elle l'aire en cm^2 ?

Exercices d'approfondissement

6. Suites et intégrales

6 - 1. Exercice 60 p 213

1. On pose, pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-x} dx.$$

   (a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

   (b) Prouver que, pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x} dx.$$

   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

   (c) Montrer, en utilisant une intégration par parties que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$$

2. On considère la suite réelle (a_n), définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_n = \frac{1}{\mathrm{e}} + (-1)^n I_n.$$

   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

6 - 2. Exercice 62 p 213

On définit la fonction f sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1. Etudier les variations de f.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 8, on pose :

$$U_n = f(8) + f(9) + \ldots + f(n).$$

   (a) Démontrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 8 :

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k).$$

   (b) En déduire : $U_{n+1} - f(8) \leqslant \displaystyle\int_8^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant U_n$.

   (c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I_n = \int_8^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   .

   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

6 - 3. Exercice 63 p 213

Pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_0 = \displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}x$ et pour $n > 0$, $u_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que $u_n \geqslant 0$.

2. Déterminer le signe de $u_n - u_{n-1}$.
   En déduire que la suite (u_n) est monotone.

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant 0$.

4. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que , pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)u_n.$$

5. A l'aide de cette relation, montrer que la limite de cette suite ne peut être strictement positive.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

6 - 4. Exercice 84 p 219

On considère la fonction f définie $[0\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) &= 1 \\ f(x) &= \frac{1}{2}(3-2\ln x)+1 \text{ si } x>0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$.

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
   Que peut-on en déduire pour la fonction f?
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Déterminer une équation de la tangente (D) à la courbe (C) au point d'abscisse $x=1$.
   (b) On pose, pour $x>0$, $g(x)=f(x)-2x-\dfrac{1}{2}$.
   Etudier le sens de variation de $g\,'$ et son signe pour $x>0$.
   (c) En déduire le sens de variation de g puis la position de la courbe (C) par rapport à la tangente (D).
3. (a) Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n, le réel $I_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2\ln x\,\mathrm{d}x$.
   (b) En déduire, en fonction de n, l'aire A_n limitée par la courbe (C), la tangente (D) et les droites d'équations $x=\dfrac{1}{n}$ et $x=1$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ et interpréter le résultat obtenu.

7. Restes de 2005 !

7 - 1. Exercice 23 p 194

Le plan est muni d'un un repère orthonormal (unité graphique 1 cm).

Soit la fontion f définie sur $[-\ln 8\,;\ln 8]$ par $f(x)=\dfrac{4\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

et la fonction g définie sur $[\ln 8\,;12]$ par $g(x)=\dfrac{32}{9}$.

1. Déterminer $f(\ln 8)$. Représenter les courbes de ces deux fonctions. On appelle (C) la réunion de ces deux courbes.
2. Déterminer, en cm^2, l'aire du domaine D délimitée par (C), l'axe $x'x$ et les droites d'équations respectives $x=-\ln 8$ et $x=12$.
3. Le volume, en cm^3, du solide engendré par la rotation autour de $x'x$ de la courbe (C) sur l'intervalle $[-\ln 8\,;\ln 8]$ est donné par : $\mathrm{V}_1=\pi\displaystyle\int_{-\ln 8}^{\ln 8}(f(x))^2\,\mathrm{d}x$.
   Calculer V_1.
   $\Big($On pourra démontrer que pour tout x réel : $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^x)^2}=$
4. Calculer le volume, en cm^3 du solide en forme de bouteille obtenu par la rotation du domaine (D) autour de l'axe $x'x$.