Terminale S - Nombres Complexes

Exercice - 1
Ecrire le nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$ sous sa forme exponentielle. En déduire la forme algébrique de z^5 .
Exercice - 2
On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}$.

1. Calculer ω^5 et prouver que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$ (on pourra remarquer qu'il s'agit de la somme des premiers termes d'une suite géométrique)

2. Soient $u = \omega + \omega^4$ et $u = \omega^2 + \omega^3$. Montrer que $u + v = -1$ et $uv = -1$. En déduire u et v.

3. En justifiant l'égalité $u = \omega + \overline{\omega}$, utiliser le résultat précédent pour calculer $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

Exercice - 3
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.
Ecrire ses solutions z_1 et z_2 sous forme trigonométrique
Exercice - 4
Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$on considère les points A d'affixe a et B d'affixe b.
On appelle M le milieu de [AB], E l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et F l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les affixes de M, E et F en fonction de a et b.

2. Etablir une relation entre les affixes des vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{OM}$.

3. En déduire que OM=$\dfrac{1}{2}$EF , puis que les droites (OM) et (EF) sont orthogonales.

Exercice - 5
Le plan complexe muni du repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 16 = 0$. On appelle z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre.

2. Soient A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Calculer l'affixe z_3 du point C tel que ABC soit un triangle equilatéral direct. (on pourra utiliser une rotation).

3. Calculer le périmètre et l'aire de ABC.

Exercice - 6
Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

- $z_1 = \sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}$
- $z_2 = \dfrac{5 - \mathrm{i}}{3 + 2\mathrm{i}}$

Exercice - 7
On considère le nombre complexe $z = (\sqrt{3} + 1) + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1)$.

1. Ecrire z^2 sous forme algébrique.

2. Déterminer le module et un argument de z^2, puis en déduire le module et un argument de z.

Exercice - 8
Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$on considère les points I, A et B d'affixes $z_I = 1$, $z_A = 2\mathrm{i}$ et $z_B = 3 + \mathrm{i}$.

1. Calculer l'affixe z_C du point C image de A par la symétrie de centre I.

2. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. En déduire le module et l'argument de ce nombre.

3. Soit D le point d'affixe zD tel que $z_D - z_C = z_A - z_B$. Montrer que ABCD est un carré.

Exercice - 9
Ecrire le nombre complexe $\sqrt{3} - \mathrm{i}$ sous forme exponentielle. En déduire la forme algébrique de $(\sqrt{3} - \mathrm{i})^7$.
Exercice - 10
On considère les nombres complexes
$z_1 = -1 - \mathrm{i}$, $z_2 = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z = z_1 z_2$.

1. Ecrire ces trois nombres sous forme trigonométrique.
2. Déterminer la forme algébrique de Z.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

Exercice - 11
Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On appelle A, B et C les points d'affixes $z_A = 2i$, $z_B = 6$, $z_C = (3 + \sqrt{3}) + i(3\sqrt{3} + 1)$.
Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. Que peut-on en déduire ?
Exercice - 12
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On note I le point d'affixe 1 ; A l'image du point O par la rotation de centre I et d'angle $\frac{2\pi}{3}$; et B l'image du point A par l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{1}{2}$.

1. Placer sur une figure les points O, I, A et B.
2. Donner sous forme algébrique les affixes z_A et z_B des points A et B.
3. Donner les formes exponentielles de z_A et z_B

.
Exercice - 13

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
   Donner les solutions sous forme algébrique puis trigonométrique.
2. Résoudre dans » l'équation :
$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 - 2\left(\frac{z+1}{z-1}\right) + 4 = 0.$$

.
Exercice - 14
θ désigne un nombre réel appartenant à l'intervalle ouvert $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
On considère l'équation d'inconnue complexe z: (E) : $(\cos^2\theta)z^2 - 2(\cos^2\theta)z + 1 = 0$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation (E). On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre solution.
2. (a) Calculer $z_1 + z_2$.
   (b) Exprimer en fonction de θ le module de chaque solution.
   (c) En déduire $z_1 \times z_2$ puis $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ en fonction de θ.
3. (a) Calculer $S = z_1^2 + z_2^2$.
   (b) Pour quelle valeur de θ a-t-on $S = 0$?

.
Exercice - 15
Soit $a \in \mathbb{C}$, on pose $z = a\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}}$.
Donner le module et un argument de z dans chacun des cas suivants :

1. $a = 1$
2. $a = \mathrm{i}$
3. $a = 1 + i\sqrt{3}$
4. $a = -\mathrm{i}$
5. a est réel
6. a est imaginaire pur

.
Exercice - 16
Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$; $b = -4 + 4\mathrm{i}$; $c = -4\mathrm{i}$.

1. Ecrire a, b et c sous forme trigonométrique.

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

Exercice - 17

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonomé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives : $z_A = 1 + \mathrm{i}$, $zB = -2 + 2\mathrm{i}$, $zC = -3 - \mathrm{i}$, $zD = -2\mathrm{i}$.

1. Calculer $\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_D}$. On donnera le résultat sous la forme algébrique.

   Interpréter géométriquement ce quotient.

2. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Exercice - 18

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonomé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives : $z_A = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$; $z_B = 2$; $z_C = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

1. Ecrire z_A et z_C sous forme trigonométrique.

2. Placer les points A , B et C sur un dessin.

3. Déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice - 19

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On considère dans le plan (P) les points A, B et C d'affixes respectives: $z_A = -1 + i\sqrt{3}$; $z_B = 2$; $z_C = -1 - i\sqrt{3}$ On admettra que ABC est un triangle équilatéral. On considère l'application f du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que: $z' = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} z$.

1. Caractériser géométriquement l'application f

2. Déterminer les images des points A et C par f.

   En déduire l'image de la droite (AC) par f.

Exercice - 20

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

On appelle f l'application qui a tout point M d'affixe z ($z \neq -1$) du plan associe le point M'

d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{-\mathrm{i}z - 2}{z + 1}$

Soient A, B et C les points d'affixe respectives $a = -1$, $b = 2\mathrm{i}$, $c = -\mathrm{i}$

1. (a) Soit C' l'image du point C par f. Donner l'affixe c' du point C' sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

   (b) Calculer l'affixe d du point D ayant pour image le point D' d'affixe $d' = \dfrac{1}{2}$.

2. Pour tout nombre complexe z différent de -1 on note ρ le module de $(z + 1)$, et ρ' le module de $z' + \mathrm{i}$.

   (a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, on a : $\rho \times \rho' = 5$.

   (b) Si le point M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A de rayon 2 montrer alors que $M' = f(M)$ appartient au cercle $\mathscr{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice - 21 Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, placer, sans faire de calcul préalable, les points A et B images respectives des nombres complexes:

$$z_1 = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \quad \text{et} \quad z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Exercice - 22

En utilisant la notation exponentielle, déterminer le module et un argument des quotients :

$$z_1 = \frac{1 - \mathrm{i}}{\sqrt{3} - \mathrm{i}} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\mathrm{i}(\mathrm{i} + 1)}{2(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})}$$

Exercice - 23

Soit $z = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ avec $\theta \in]-\pi;\pi[$.

1. Montrer que z est un imaginaire pur.

2. Exprimer $|z|$ en fonction de $\dfrac{\theta}{2}$.

Exercice - 24

Les points A, B et C ont pour abscisses respectives 2, 4-4i et 4+i.
Démontrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculeires.

Exercice - 25

Les points A, B et C ont pour abscisses respectives 3+i, $\frac{4-\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{2}$ et $2-\mathrm{i}\sqrt{2}$.
Démontrer que A, B et C sont situés sur un même cercle de centre I d'affixe 2 dont on précisera le rayon.

Exercice - 26

Les points E, F et G ont pour abscisses respectives

$$z_E = -3+\mathrm{i};\ z_F = 4,5+2,5\mathrm{i};\ z_G = 2+2\mathrm{i}$$

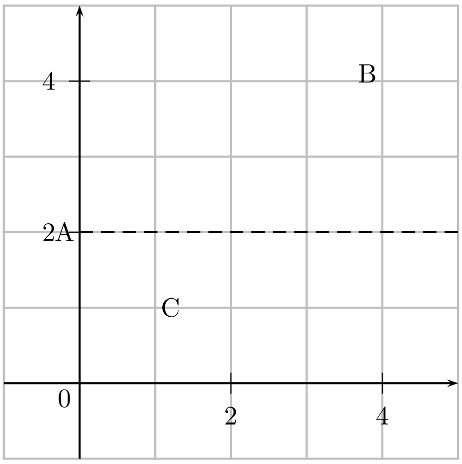
Donner une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG})$.
Que peut-on en conclure pour les points E, F et G?

Exercice - 27

Dans le plan complexe, les points A, B et C ont respectivement pour affixes :

$$a = 2\mathrm{i}, b = 2\mathrm{i} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \quad \text{et } c = \frac{2}{3}(\sqrt{3}+2\mathrm{i})$$

1. Recopier et compléter la figure:



2. Vérifier que les points O, C et B sont alignés.
3. Déterminer $\frac{CO}{CB}$ et $\frac{AQ}{AB}$.
4. Comparer $\arg\frac{a-c}{a}$ et $\arg\frac{b-a}{c-a}$.
   Quelle interprétation géométrique peut-on donner de cette propriété?
   Quelle propriété de la bissectrice intérieure d'un angle retrouve-t-on ici ?

Exercice - 28

Soit $z_1 = 1+\mathrm{i}$ et $z_2 = -2\mathrm{i}$.
Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres suivants :

1. $z_1 - 2z_2$;
2. $\frac{z_1}{z_2}$;
3. $z_1^2 z_2$;
4. $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$

Exercice - 29

1. Déterminer i^3, i^4, i^5 puis i^n, suivant les valeurs de n.
2. Calculer $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\cdots+\mathrm{i}^7$.
3. Calculer $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\cdots+\mathrm{i}^n$ suivant les valeurs de n.

Exercice - 30

On considère les nombres complexes z_1, z_2 et z_3, tels que $z_1 = (1-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$; $z_2 = \frac{2+6\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$; $z_3 = \frac{-4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.
On désigne par M_1, M_2 et M_3 les images respectives de z_1, z_2 et z_3 dans le plan complexe.

1. Calculer les parties réelles et imaginaires de z_1, z_2 et z_3. Placer M_1, M_2 et M_3.
2. Calculer $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$; en déduire la nature du triangle $M_1M_2M_3$.
3. Déterminer l'affixe du point M_4 tel que le quadrilatère $M_2M_1M_3M_4$ soit un carré.

Exercice - 31

1. En utilisant la notation exponentielle, déterminer le module et un argument de $z_1 = \dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

Exercice - 32

Ecrire le nombre complexe $\sqrt{3} - \mathrm{i}$ sous forme trigonométrique.
En déduire la forme algébrique de $(\sqrt{3} - \mathrm{i})^7$.

Exercice - 33

Soit $z = x + \mathrm{i}y$ et $Z = \dfrac{z+1}{z-\mathrm{i}}$.

1. Donner la forme algébrique de Z.
2. Soit $E = \{M(z)/Z \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{M(z)/Z \in \mathrm{i}\mathbb{R}\}$.
   Déterminer E et F
   (a) en utilisant la forme algébrique de Z ;
   (b) en utilisant les points $A(-1)$ et $B(\mathrm{i})$.