Exercice spécialité 5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M$'$ d'affixe z' telle que

$$z' = -\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)z - 1 + \mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

1. Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i. En déterminer le rapport et l'angle.

2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}\mathrm{i}$.

Calculer $\Omega\mathrm{M}_0$ et donner une mesure en radians de l'angle $\left(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}_0}}\right)$

3. On considère la suite des points $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tou0t naturel n par $\mathrm{M}_{n+1} = f\left(\mathrm{M}_n\right)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

a) Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

b) Montrer par récurrence, pour tout entier naturel n, l'égalité

$$z_n - \mathrm{i} = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7n\pi}{6}}\left(z_0 - \mathrm{i}\right).$$

En déduire que $z_n - \mathrm{i} = 2^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(7n-1)\pi}{6}}$.

c) Pour tout n entier naturel, calculer $\Omega\mathrm{M}_n$ puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega\mathrm{M}_n \geqslant 10^2$.

4. a) On considère l'équation (E) : $7n - 12k = 1$ où n et k sont deux entiers relatifs.

Après avoir vérifié que le couple $(-5\,;\,-3)$ est solution, résoudre l'équation (E).

b) Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $\mathfrak{Im}(z) = 1$ et $\mathfrak{Re}(z) \geqslant 0$.

Caractériser géométriquement et le représenter.

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Préciser son plus petit élément.