RELATION D'ORDRE
Exemple de construction mathématique

Guillaume CONNAN

Lycée Jean PERRIN

Septembre 2006

Sommaire

Nous allons jouer aux mathématiciens sorciers en créant une suite d'outils nécessaires à la résolution de problèmes concrets.

- Nous commencerons par énoncer de manière générale ce que nous cherchons à faire.
- Nous nous mettrons d'accord sur un point de départ.
- En étudiant des situations concrètes, nous dresserons une liste d'outils dont nous aurons besoin pour résoudre nos problèmes : des théorèmes.
- Nous essaierons de prouver que ces théorèmes sont vrais en les déduisant logiquement de notre définition de départ.

Nous allons jouer aux mathématiciens sorciers en créant une suite d'outils nécessaires à la résolution de problèmes concrets.

- Nous commencerons par énoncer de manière générale ce que nous cherchons à faire.
- Nous nous mettrons d'accord sur un point de départ.
- En étudiant des situations concrètes, nous dresserons une liste d'outils dont nous aurons besoin pour résoudre nos problèmes : des théorèmes.
- Nous essaierons de prouver que ces théorèmes sont vrais en les déduisant logiquement de notre définition de départ.

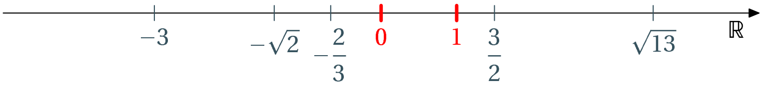
Nous allons jouer aux mathématiciens sorciers en créant une suite d'outils nécessaires à la résolution de problèmes concrets.

- Nous commencerons par énoncer de manière générale ce que nous cherchons à faire.
- Nous nous mettrons d'accord sur un point de départ.
- En étudiant des situations concrètes, nous dresserons une liste d'outils dont nous aurons besoin pour résoudre nos problèmes : des théorèmes.
- Nous essaierons de prouver que ces théorèmes sont vrais en les déduisant logiquement de notre définition de départ.

Nous allons jouer aux mathématiciens sorciers en créant une suite d'outils nécessaires à la résolution de problèmes concrets.

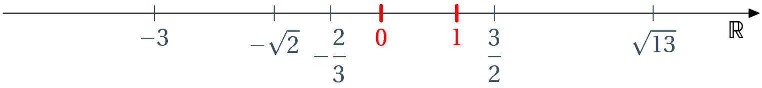
- Nous commencerons par énoncer de manière générale ce que nous cherchons à faire.
- Nous nous mettrons d'accord sur un point de départ.
- En étudiant des situations concrètes, nous dresserons une liste d'outils dont nous aurons besoin pour résoudre nos problèmes : des théorèmes.
- Nous essaierons de prouver que ces théorèmes sont vrais en les déduisant logiquement de notre définition de départ.

Nous avons défini les nombres réels comme les abscisses des points d'une droite orientée munie d'une origine et d'une unité. Nous **voyons** comment ils sont rangés,



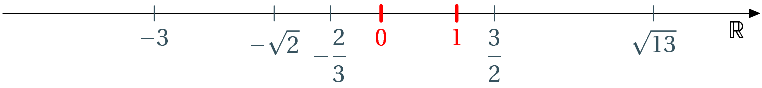
mais comment **définir** un ordre de rangement pour pouvoir calculer et raisonner sans avoir la droite réelle sous les yeux ?

Nous avons défini les nombres réels comme les abscisses des points d'une droite orientée munie d'une origine et d'une unité. Nous **voyons** comment ils sont rangés,



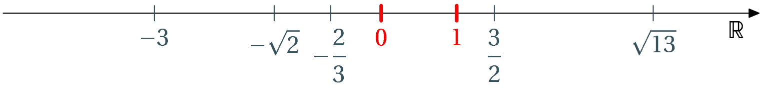
mais comment **définir** un ordre de rangement pour pouvoir calculer et raisonner sans avoir la droite réelle sous les yeux ?

Nous avons défini les nombres réels comme les abscisses des points d'une droite orientée munie d'une origine et d'une unité. Nous **voyons** comment ils sont rangés,



mais comment **définir** un ordre de rangement pour pouvoir calculer et raisonner sans avoir la droite réelle sous les yeux ?

Nous avons défini les nombres réels comme les abscisses des points d'une droite orientée munie d'une origine et d'une unité. Nous **voyons** comment ils sont rangés,



mais comment **définir** un ordre de rangement pour pouvoir calculer et raisonner sans avoir la droite réelle sous les yeux ?

Sommaire

Nous venons de définir les nombres réels, mais nous savons déjà calculer avec eux : nous supposerons que vous savez déjà les additionner, les soustraire, les multiplier, les diviser.
Nous supposerons également que vous savez définir leur signe, et que vous connaissez la règle des signes

Règle

- le produit de deux nombres de même signe est positif
- le produit de deux nombres de signes différents est négatif

Nous venons de définir les nombres réels, mais nous savons déjà calculer avec eux : nous supposerons que vous savez déjà les additionner, les soustraire, les multiplier, les diviser.

Nous supposerons également que vous savez définir leur signe, et que vous connaissez la règle des signes

Règle

- le produit de deux nombres de même signe est positif
- le produit de deux nombres de signes différents est négatif

Nous venons de définir les nombres réels, mais nous savons déjà calculer avec eux : nous supposerons que vous savez déjà les additionner, les soustraire, les multiplier, les diviser.
Nous supposerons également que vous savez définir leur signe, et que vous connaissez la règle des signes

Règle

- le produit de deux nombres de même signe est positif
- le produit de deux nombres de signes différents est négatif

Nous venons de définir les nombres réels, mais nous savons déjà calculer avec eux : nous supposerons que vous savez déjà les additionner, les soustraire, les multiplier, les diviser.
Nous supposerons également que vous savez définir leur signe, et que vous connaissez la règle des signes

Règle

- le produit de deux nombres de même signe est positif
- le produit de deux nombres de signes différents est négatif

Nous venons de définir les nombres réels, mais nous savons déjà calculer avec eux : nous supposerons que vous savez déjà les additionner, les soustraire, les multiplier, les diviser.
Nous supposerons également que vous savez définir leur signe, et que vous connaissez la règle des signes

Règle

- le produit de deux nombres de même signe est positif
- le produit de deux nombres de signes différents est négatif

Sommaire

Définition

Soient a et b deux nombres réels quelconques.
Nous dirons que a est **supérieur à** b lorsque la différence $a-b$ est positive. On notera alors

$$a \geqslant b$$

Sommaire

Problème

J'ai trouvé un diamant dans la rue. Je le pose sur une vieille balance avec une baguette de 200g et je peux seulement lire sur le cadran abimé que la masse dépasse 800g. Qu'est-ce que je peux dire de la masse du diamant ?

Je sais, c'est un peu simple, mais qui vous a dit que le programme de Seconde était compliqué ?

Problème

J'ai trouvé un diamant dans la rue. Je le pose sur une vieille balance avec une baguette de 200g et je peux seulement lire sur le cadran abimé que la masse dépasse 800g. Qu'est-ce que je peux dire de la masse du diamant ?

Je sais, c'est un peu simple, mais qui vous a dit que le programme de Seconde était compliqué ?

Problème

J'ai trouvé un diamant dans la rue. Je le pose sur une vieille balance avec une baguette de 200g et je peux seulement lire sur le cadran abimé que la masse dépasse 800g. Qu'est-ce que je peux dire de la masse du diamant ?

Je sais, c'est un peu simple, mais qui vous a dit que le programme de Seconde était compliqué ?

Problème

J'ai trouvé un diamant dans la rue. Je le pose sur une vieille balance avec une baguette de 200g et je peux seulement lire sur le cadran abimé que la masse dépasse 800g. Qu'est-ce que je peux dire de la masse du diamant ?

Je sais, c'est un peu simple, mais qui vous a dit que le programme de Seconde était compliqué ?

Traduction mathématique du problème

Si on appelle m la masse inconnue du diamant, on sait que

$$m + 200 \geqslant 800$$

On a envie « d'enlever »200 de chaque « côté »de l'inégalité et on **sent** bien que ça va « marcher », mais est-ce que notre nez mathématique n'est pas enrhumé ?
Le seul moyen de s'en assurer, c'est de le prouver en utilisant notre définition de l'ordre des nombres réels.

Traduction mathématique du problème

Si on appelle m la masse inconnue du diamant, on sait que

$$m + 200 \geqslant 800$$

On a envie « d'enlever »200 de chaque « côté »de l'inégalité et on sent bien que ça va « marcher », mais est-ce que notre nez mathématique n'est pas enrhumé ?
Le seul moyen de s'en assurer, c'est de le prouver en utilisant notre définition de l'ordre des nombres réels.

Traduction mathématique du problème

Si on appelle m la masse inconnue du diamant, on sait que

$$m + 200 \geqslant 800$$

On a envie « d'enlever »200 de chaque « côté »de l'inégalité et on **sent** bien que ça va « marcher », mais est-ce que notre nez mathématique n'est pas enrhumé ?

Le seul moyen de s'en assurer, c'est de le prouver en utilisant notre définition de l'ordre des nombres réels.

Traduction mathématique du problème

Si on appelle m la masse inconnue du diamant, on sait que

$$m + 200 \geqslant 800$$

On a envie « d'enlever »200 de chaque « côté »de l'inégalité et on **sent** bien que ça va « marcher », mais est-ce que notre nez mathématique n'est pas enrhumé ?
Le seul moyen de s'en assurer, c'est de le prouver en utilisant notre définition de l'ordre des nombres réels.

Preuve de notre intuition

Données

- *Nous savons que* $m + 200 \geqslant 800$
- *Nous connaissons notre définition :* $A \geqslant B \iff A - B \geqslant 0$

Nous déduisons de la donnée du texte et de notre définition que l'on peut écrire

$$m + 200 - 800 \geqslant 0$$

Ce qui s'écrit encore

$$m - 600 \geqslant 0$$

C'est à dire, d'après notre définition

$$m \geqslant 600$$

Preuve de notre intuition

Données

- *Nous savons que* $m + 200 \geqslant 800$
- *Nous connaissons notre définition :* $A \geqslant B \iff A - B \geqslant 0$

Nous déduisons de la donnée du texte et de notre définition que l'on peut écrire

$$m + 200 - 800 \geqslant 0$$

Ce qui s'écrit encore

$$m - 600 \geqslant 0$$

C'est à dire, d'après notre définition

$$m \geqslant 600$$

Preuve de notre intuition

Données

- *Nous savons que* $m + 200 \geqslant 800$
- *Nous connaissons notre définition :* $A \geqslant B \iff A - B \geqslant 0$

Nous déduisons de la donnée du texte et de notre définition que l'on peut écrire

$$m + 200 - 800 \geqslant 0$$

Ce qui s'écrit encore

$$m - 600 \geqslant 0$$

C'est à dire, d'après notre définition

$$m \geqslant 600$$

Preuve de notre intuition

Données

- *Nous savons que* $m + 200 \geqslant 800$
- *Nous connaissons notre définition :* $A \geqslant B \Longleftrightarrow A - B \geqslant 0$

Nous déduisons de la donnée du texte et de notre définition que l'on peut écrire

$$m + 200 - 800 \geqslant 0$$

Ce qui s'écrit encore

$$m - 600 \geqslant 0$$

C'est à dire, d'après notre définition

$$m \geqslant 600$$

Preuve de notre intuition

Données

- *Nous savons que* $m + 200 \geqslant 800$
- *Nous connaissons notre définition :* $A \geqslant B \Longleftrightarrow A - B \geqslant 0$

Nous déduisons de la donnée du texte et de notre définition que l'on peut écrire

$$m + 200 - 800 \geqslant 0$$

Ce qui s'écrit encore

$$m - 600 \geqslant 0$$

C'est à dire, d'après notre définition

$$m \geqslant 600$$

Preuve de notre intuition

Données

- *Nous savons que* $m + 200 \geqslant 800$
- *Nous connaissons notre définition :* $A \geqslant B \iff A - B \geqslant 0$

Nous déduisons de la donnée du texte et de notre définition que l'on peut écrire

$$m + 200 - 800 \geqslant 0$$

Ce qui s'écrit encore

$$m - 600 \geqslant 0$$

C'est à dire, d'après notre définition

$$m \geqslant 600$$

Preuve de notre intuition

Données

- *Nous savons que* $m + 200 \geqslant 800$
- *Nous connaissons notre définition :* $A \geqslant B \iff A - B \geqslant 0$

Nous déduisons de la donnée du texte et de notre définition que l'on peut écrire

$$m + 200 - 800 \geqslant 0$$

Ce qui s'écrit encore

$$m - 600 \geqslant 0$$

C'est à dire, d'après notre définition

$$m \geqslant 600$$

Preuve de notre intuition

Données

- *Nous savons que* $m + 200 \geqslant 800$
- *Nous connaissons notre définition :* $A \geqslant B \iff A - B \geqslant 0$

Nous déduisons de la donnée du texte et de notre définition que l'on peut écrire

$$m + 200 - 800 \geqslant 0$$

Ce qui s'écrit encore

$$m - 600 \geqslant 0$$

C'est à dire, d'après notre définition

$$m \geqslant 600$$

Enseignements à tirer de cet exemple

Nous sommes partis d'une inégalité.
Nous avons soustrait 800 aux deux membres de l'inégalité.
Le sens de l'inégalité n'a pas changé.

Enseignements à tirer de cet exemple

Nous sommes partis d'une inégalité.

Nous avons soustrait 800 aux deux membres de l'inégalité.

Le sens de l'inégalité n'a pas changé.

Enseignements à tirer de cet exemple

Nous sommes partis d'une inégalité.
Nous avons soustrait 800 aux deux membres de l'inégalité.
Le sens de l'inégalité n'a pas changé.

Enseignements à tirer de cet exemple

Nous sommes partis d'une inégalité.
Nous avons soustrait 800 aux deux membres de l'inégalité.
Le sens de l'inégalité n'a pas changé.

Prolongements

Nous venons de voir **SUR UN EXEMPLE**, que soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité ne change pas son sens.
Pouvons-nous généraliser ?
Plusieurs problèmes se posent :

- Comment formuler **algébriquement** (à l'aide d'une formule) notre propriété ?
- Est-ce nécessaire ?
- Comment prouver le résultat dans le cas général ?

Prolongements

Nous venons de voir **SUR UN EXEMPLE**, que soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité ne change pas son sens.
Pouvons-nous généraliser ?
Plusieurs problèmes se posent :

- Comment formuler **algébriquement** (à l'aide d'une formule) notre propriété ?
- Est-ce nécessaire ?
- Comment prouver le résultat dans le cas général ?

Prolongements

Nous venons de voir **SUR UN EXEMPLE**, que soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité ne change pas son sens.
Pouvons-nous généraliser ?
Plusieurs problèmes se posent :

- Comment formuler **algébriquement** (à l'aide d'une formule) notre propriété ?
- Est-ce nécessaire ?
- Comment prouver le résultat dans le cas général ?

Prolongements

Nous venons de voir **SUR UN EXEMPLE**, que soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité ne change pas son sens.
Pouvons-nous généraliser ?
Plusieurs problèmes se posent :

- Comment formuler **algébriquement** (à l'aide d'une formule) notre propriété ?
- Est-ce nécessaire ?
- Comment prouver le résultat dans le cas général ?

Prolongements

Nous venons de voir **SUR UN EXEMPLE**, que soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité ne change pas son sens.
Pouvons-nous généraliser ?
Plusieurs problèmes se posent :

- Comment formuler **algébriquement** (à l'aide d'une formule) notre propriété ?
- Est-ce nécessaire ?
- Comment prouver le résultat dans le cas général ?

Prolongements

Nous venons de voir **SUR UN EXEMPLE**, que soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité ne change pas son sens.
Pouvons-nous généraliser ?
Plusieurs problèmes se posent :

- Comment formuler **algébriquement** (à l'aide d'une formule) notre propriété ?
- Est-ce nécessaire ?
- Comment prouver le résultat dans le cas général ?

Le théorème

Théorème

On peut ajouter un même nombre réel aux deux membres d'une inégalité sans en changer le sens, ce qui s'écrit encore :

- *Soit a et b deux réels vérifiant $a \geqslant b$*
- *Soit c un réel quelconque*
- *Alors on a toujours*

$$a+c \geqslant b+c$$

Le théorème

Théorème

On peut ajouter un même nombre réel aux deux membres d'une inégalité sans en changer le sens, ce qui s'écrit encore :

- *Soit a et b deux réels vérifiant $a \geqslant b$*
- *Soit c un réel quelconque*
- *Alors on a toujours*

$$a+c \geqslant b+c$$

Le théorème

Théorème

On peut ajouter un même nombre réel aux deux membres d'une inégalité sans en changer le sens, ce qui s'écrit encore :

- *Soit a et b deux réels vérifiant $a \geqslant b$*
- *Soit c un réel quelconque*
- *Alors on a toujours*

$$a+c \geqslant b+c$$

Le théorème

Théorème

On peut ajouter un même nombre réel aux deux membres d'une inégalité sans en changer le sens, ce qui s'écrit encore :

- *Soit a et b deux réels vérifiant $a \geqslant b$*
- *Soit c un réel quelconque*
- *Alors on a toujours*

$$a+c \geqslant b+c$$

UNE preuve

Voici **UNE** preuve possible en utilisant nos données

Preuve

- $a \geqslant b$
- $a - b \geqslant 0$
- $a - b + c - c \geqslant 0$
- $a + c - b - c \geqslant 0$
- $(a + c) - (b + c) \geqslant 0$
- $a + c \geqslant b + c$

Nous sommes partis de $a \geqslant b$
Nous sommes arrivés à $a + c \geqslant b + c$, et ce, quelque soit le réel c.
Nous avons donc bien prouvé ce que nous voulions.

UNE preuve

Voici **UNE** preuve possible en utilisant nos données

Preuve

- $a \geqslant b$
- $a - b \geqslant 0$
- $a - b + c - c \geqslant 0$
- $a + c - b - c \geqslant 0$
- $(a+c) - (b+c) \geqslant 0$
- $a + c \geqslant b + c$

Nous sommes partis de $a \geqslant b$
Nous sommes arrivés à $a + c \geqslant b + c$, et ce, quelque soit le réel c.
Nous avons donc bien prouvé ce que nous voulions.

UNE preuve

Voici **UNE** preuve possible en utilisant nos données

Preuve

- $a \geqslant b$
- $a - b \geqslant 0$
- $a - b + c - c \geqslant 0$
- $a + c - b - c \geqslant 0$
- $(a + c) - (b + c) \geqslant 0$
- $a + c \geqslant b + c$

Nous sommes partis de $a \geqslant b$
Nous sommes arrivés à $a + c \geqslant b + c$, et ce, quelque soit le réel c.
Nous avons donc bien prouvé ce que nous voulions.

UNE preuve

Voici **UNE** preuve possible en utilisant nos données

Preuve

- $a \geqslant b$
- $a - b \geqslant 0$
- $a - b + c - c \geqslant 0$
- $a + c - b - c \geqslant 0$
- $(a + c) - (b + c) \geqslant 0$
- $a + c \geqslant b + c$

Nous sommes partis de $a \geqslant b$
Nous sommes arrivés à $a + c \geqslant b + c$, et ce, quelque soit le réel c.
Nous avons donc bien prouvé ce que nous voulions.

UNE preuve

Voici **UNE** preuve possible en utilisant nos données

Preuve

- $a \geqslant b$
- $a - b \geqslant 0$
- $a - b + c - c \geqslant 0$
- $a + c - b - c \geqslant 0$
- $(a + c) - (b + c) \geqslant 0$
- $a + c \geqslant b + c$

Nous sommes partis de $a \geqslant b$
Nous sommes arrivés à $a + c \geqslant b + c$, et ce, quelque soit le réel c.
Nous avons donc bien prouvé ce que nous voulions.

UNE preuve

Voici **UNE** preuve possible en utilisant nos données

Preuve

- $a \geqslant b$
- $a - b \geqslant 0$
- $a - b + c - c \geqslant 0$
- $a + c - b - c \geqslant 0$
- $(a+c) - (b+c) \geqslant 0$
- $a + c \geqslant b + c$

Nous sommes partis de $a \geqslant b$
Nous sommes arrivés à $a + c \geqslant b + c$, et ce, quelque soit le réel c.
Nous avons donc bien prouvé ce que nous voulions.

UNE preuve

Voici **UNE** preuve possible en utilisant nos données

Preuve

- $a \geqslant b$
- $a - b \geqslant 0$
- $a - b + c - c \geqslant 0$
- $a + c - b - c \geqslant 0$
- $(a+c) - (b+c) \geqslant 0$
- $a + c \geqslant b + c$

Nous sommes partis de $a \geqslant b$
Nous sommes arrivés à $a + c \geqslant b + c$, et ce, quelque soit le réel c.
Nous avons donc bien prouvé ce que nous voulions.

UNE preuve

Voici **UNE** preuve possible en utilisant nos données

Preuve

- $a \geqslant b$
- $a - b \geqslant 0$
- $a - b + c - c \geqslant 0$
- $a + c - b - c \geqslant 0$
- $(a + c) - (b + c) \geqslant 0$
- $a + c \geqslant b + c$

Nous sommes partis de $a \geqslant b$
Nous sommes arrivés à $a + c \geqslant b + c$, et ce, quelque soit le réel c.
Nous avons donc bien prouvé ce que nous voulions.

UNE preuve

Voici **UNE** preuve possible en utilisant nos données

Preuve

- $a \geqslant b$
- $a - b \geqslant 0$
- $a - b + c - c \geqslant 0$
- $a + c - b - c \geqslant 0$
- $(a + c) - (b + c) \geqslant 0$
- $a + c \geqslant b + c$

Nous sommes partis de $a \geqslant b$
Nous sommes arrivés à $a + c \geqslant b + c$, et ce, quelque soit le réel c.
Nous avons donc bien prouvé ce que nous voulions.

UNE preuve

Voici **UNE** preuve possible en utilisant nos données

Preuve

- $a \geqslant b$
- $a - b \geqslant 0$
- $a - b + c - c \geqslant 0$
- $a + c - b - c \geqslant 0$
- $(a + c) - (b + c) \geqslant 0$
- $a + c \geqslant b + c$

Nous sommes partis de $a \geqslant b$
Nous sommes arrivés à $a + c \geqslant b + c$, et ce, quelque soit le réel c.
Nous avons donc bien prouvé ce que nous voulions.

UNE preuve

Voici **UNE** preuve possible en utilisant nos données

Preuve

- $a \geqslant b$
- $a - b \geqslant 0$
- $a - b + c - c \geqslant 0$
- $a + c - b - c \geqslant 0$
- $(a + c) - (b + c) \geqslant 0$
- $a + c \geqslant b + c$

Nous sommes partis de $a \geqslant b$

Nous sommes arrivés à $a + c \geqslant b + c$, et ce, quelque soit le réel c.

Nous avons donc bien prouvé ce que nous voulions.

UNE preuve

Voici **UNE** preuve possible en utilisant nos données

Preuve

- $a \geqslant b$
- $a - b \geqslant 0$
- $a - b + c - c \geqslant 0$
- $a + c - b - c \geqslant 0$
- $(a + c) - (b + c) \geqslant 0$
- $a + c \geqslant b + c$

Nous sommes partis de $a \geqslant b$

Nous sommes arrivés à $a + c \geqslant b + c$, et ce, quelque soit le réel c.

Nous avons donc bien prouvé ce que nous voulions.

UNE preuve

Voici **UNE** preuve possible en utilisant nos données

Preuve

- $a \geqslant b$
- $a - b \geqslant 0$
- $a - b + c - c \geqslant 0$
- $a + c - b - c \geqslant 0$
- $(a + c) - (b + c) \geqslant 0$
- $a + c \geqslant b + c$

Nous sommes partis de $a \geqslant b$
Nous sommes arrivés à $a + c \geqslant b + c$, et ce, quelque soit le réel c.
Nous avons donc bien prouvé ce que nous voulions.

Sommaire

Quels autres théorèmes pouvez-vous imaginer... et démonter ?