Lycée Notre-Dame de Rezé

TERMINALE S3 — **1er Octobre 2018**

Devoir Surveillé - Mathématiques

Durée : cent dix-huit minutes

CONSIGNES: Vous justifierez vos réponses avec le plus grand soin. MAY THE FORCE BE WITH YOU!

Exercice 1. (*points*)
Prérequis : on suppose connue la définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

Démontrer le théorème suivant :

> *Soit* u *et* v *deux suites définies sur* $\mathbb{N}$ *vérifiant :*
> — $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
> — *Il existe un entier* N_0 *tel que pour tout entier* $n \geqslant N_0$ *on a* $v_n \geqslant u_n$
> *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Exercice 2. (*points*)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 4x + 5$.

a. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1. On notera $\mathcal{C}$ cette courbe.

b. On cherche à présent à étudier position relative de la courbe de f et de $\mathcal{T}$.

  i. Soit la fonction P définie par $P(x) = -x^3 - 2x^2 + 7x - 4$. Calculer $P(-4)$.

  ii. Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(x) = (x+4)(ax^2 + bx + c)$.

  iii. Conclure quant à la position relative de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 3. (*points*)
Étudier la limite des suites de terme général $u_n = 4 + \dfrac{3\sin(n)}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 2}$

Exercice 4. (*points*)
Écrivez les nombres suivant sous forme algébrique :

a. $z_a = (2 + \mathrm{i})^3$

b. $z_b = \dfrac{2 + \mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}$

c. $z_c = \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}$

d. $z_d = \mathrm{i}\, z_1^2 + \dfrac{z_2}{z_3}$ avec $z_1 = 3 - \mathrm{i}$, $z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$, $z_3 = -2\mathrm{i}$.

Exercice 5. (*points*)
Un élève de T$^{\text{ale}}$S3 a décidé de parcourir 5000 km à pied. Il peut parcourir 50 km par jour mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performace diminue de 1% tous les jours. On note d_n la distance parcourue durant le n-ième jour. Ainsi $d_1 = 50$ km.

a. Quelle est la nature de la suite (d_n) ?

b. Exprimer d_n en fonction de n.

c. On note L_n la disrtance totale parcourue en n jours. Exprimer L_n en fonction de n.

d. Quand atteindra-t-il son but ?

e. Au bout de combien de jours sera-t-il à moins de 100 km de l'arrivée ? À moins de 10 km ? À moins de 100 m ? On pourra s'aider d'une calculatrice.

f. Compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche à la fin le plus petit entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait $5000 - L_n \leqslant$ seuil

```
Algorithme ...à compléter
Variable
    n : entier
    L, u, seuil : flottant
Début
    Afficher("valeur du seuil ?")
    Lire(seuil)
    n ← ...
    u ← ...
    L ← ...
    TantQue ... Faire
        ... ← ...
        ... ← ...
        ... ← ...
    FinTantQue
    Afficher(...)
Fin
```