Corrigé du DS n°2 - T$^{\text{ale}}$S4 - Jeudi 5 novembre 2009 - 2 heures

Exercice 3

Partie A : étude de f

1. Pour tout réel x, $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + |-x|} = \sqrt{x^2 + |x|} = f(x)$.
   On en déduit que f est paire et que la courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe $\left(O; \overrightarrow{j}\right)$. Il suffit donc d'étudier f sur $[0;+\infty[$.
2. Sur $[0;+\infty[$, $f(x) = \sqrt{x^2+x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + x = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \sqrt{t} = +\infty$ donc, par composition de limites,
   $$\lim_{x\to+\infty} = +\infty$$
   Comme f est paire, on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} = +\infty$.
3. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ n'est pas dérivable en zéro. Étudions donc la limite du taux de variation en zéro par valeur supérieure car f est paire.
   $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$$
   Or $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \sqrt{t} = +\infty$ donc
   $$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$$
   La fonction f n'est donc pas dérivable en 0 et $\mathcal{C}$ admet une tangente verticale au point d'abscisse zéro.
4. Sur $\mathbb{R}_+$, les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$ sont strictement croissantes et à valeurs positives donc $x \mapsto x^2 + x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   Sur $\mathbb{R}_+$, f est donc la composée de deux fonctions strictement croissantes donc est elle-même strictement croissante sur cet intervalle.

   Autre méthode : on aurait pu calculer la dérivée de f.
   $$f'(x) = (2x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$$
   Sur $\mathbb{R}_+$, $f'(x)$ est strictement positive donc f y est strictement croissante.
5. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	$\|$	$+$
Variations de f	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Partie B : asymptotes à $\mathcal{C}$

1. Étudions l'éventuelle limite en $+\infty$ de $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)$. Le réel x est donc positif :
   $$\begin{aligned} f(x) - \left(x+\frac{1}{2}\right) &= \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{x^2+x-x^2}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$ donc
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(x+\frac{1}{2}\right) = 0$$
   On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite $\mathcal{D}$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

2. On a montré que $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+1}}-\frac{1}{2}$.

Or $\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1>\sqrt{1}+1=2$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}<\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)$ est négatif sur $\mathbb{R}_+$ et donc que $\mathcal{C}$ est en-dessous de $\mathcal{D}$.

3. Comme f est paire, $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y=-x+\frac{1}{2}$, symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à $\left(\mathrm{O};\vec{\jmath}\right)$, comme asymptote au voisinage de $-\infty$.

Partie C : résolution d'une équation

1. Complétons le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$:

x	0	a_n	$+\infty$
Variations de f	0 ↗	n ↗	$+\infty$

Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f :
– est continue ;
– est strictement croissante.
De plus n appartient à $\left[f(0);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$. On en déduit, d'après le théorème de la bijection, que l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

2. Résolvons l'équation (E) : $f(x)=n$

$$(\mathrm{E}) \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+x}=n$$
$$(\mathrm{E}) \Longleftrightarrow x^2+x-n^2=0 \quad \text{car } n \text{ est positif}$$
$$(\mathrm{E}) \Longleftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4n^2}}{2}$$

Or a_n est positif donc $a_n=\frac{-1+\sqrt{1+4n^2}}{2}$

Exercice 4

1. D'une part $z_{\mathrm{B}'}=\frac{2i}{-1}=-2i$.

D'autre part $z_{\mathrm{C}'}=\frac{2i}{2i+1}=\frac{2i(1-2i)}{4+1}=\frac{4+2i}{5}$.

2. M est invariant par f si, et seulement si, $f(\mathrm{M})=\mathrm{M}$. Notons (E) cette équation.

$$(\mathrm{E}) \Longleftrightarrow z'=z$$
$$(\mathrm{E}) \Longleftrightarrow z=\frac{z^2}{i-z}$$
$$(\mathrm{E}) \Longleftrightarrow 2z^2-iz=0$$
$$(\mathrm{E}) \Longleftrightarrow z(2z-i)=0$$

Les points invariants sont donc les points d'affixes 0 et $\frac{i}{2}$.

3. a) On a $z'=\frac{x^2-y^2+2ixy}{i-x-iy}=\frac{(x^2-y^2+2ixy)(-x-i(1-y))}{x^2+(1-y)^2}$.

On en déduit que $\mathfrak{Re}(z)=\frac{-x(x^2-y^2)+2xy(1-y)}{x^2+(1-y)^2}=\frac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}$.

b) On en déduit que z' est un imaginaire pur si, et seulement si, $\frac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}=0$ c'est-à-dire si, et seulement si, $x=0$ ou $x^2+y^2-2y=0$.

Or l'ensemble des points d'affixe $x+iy$ vérifiant $x=0$ est la droite $\left(\mathrm{O};\vec{\jmath}\right)$.

D'autre part, $x^2+y^2-2y=x^2+(y-1)^2-1$ après avoir mis sous forme canonique le polynôme en y. Ainsi $x^2+y^2-2y=0 \Longleftrightarrow x^2+(y-1)^2=1$.
L'ensemble des points d'affixe $x+iy$ vérifiant $x^2+y^2-2y=0$ est donc le cercle Γ de centre le point de coordonnées $(0;1)$, c'est-à-dire d'affixe 1, et de rayon 1.

L'ensemble $\mathcal{E}$ cherché est donc la réunion de l'axe $\left(\mathrm{O};\vec{\jmath}\right)$ et du cercle Γ.