

DEVOIR COMMUN

Session 2010

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la loi en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 3 pages numérotées de 1 à 3.

EXERCICE 1 (3 points)

Soit la suite (I_n) définie sur \mathbb{N}^* par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$$

1. Étudiez le sens de variation de la suite (I_n) .
2. Montrez que, pour tout x de $[0; 1]$, on a :

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$$

En déduire un encadrement de I_n et la limite de la suite (I_n) .

EXERCICE 2 (7 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}.$$

Partie A :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
2. Vérifier que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de l'équation (E).
3. Montrer qu'une fonction h définie et dérivable sur \mathbb{R} est solution de (E) si, et seulement si, $h - g$ est solution de (E').
4. En déduire toutes les solutions de (E) sur \mathbb{R} .
5. Déterminer la fonction f solution de (E) qui prend la valeur $\frac{3}{2}$ en 0.

Partie B :

On nomme \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. Montrer que pour tout x de \mathbb{R} on a : $f(x) = 3e^{-2x} \left(\frac{3}{2} - e^{-x} \right)$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f .
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec les axes du repère.
5. Tracer la courbe \mathcal{C}_f .
6. Déterminer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On exprimera cette aire en cm^2 .

EXERCICE 3 (5 points)

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé.

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ».

L'évènement contraire d'un évènement E sera noté \bar{E} .

La probabilité d'un évènement E sera notée $\mathbb{P}(E)$.

Partie A

1. Montrer que $\mathbb{P}(G) = \frac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3. Quel nombre minimal n de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1 € par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 € ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
 - a) Donner la loi de probabilité de X et son espérance $\mathbb{E}(X)$.
 - b) On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $\mathbb{E}(X) < 0$.
Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc.
Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

EXERCICE 4 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation $\frac{z-4}{z} = i$. Écrire la solution sous forme algébrique.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.
3. Soient A, B, A' et D les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$a = 2, \quad b = 4, \quad a' = 2i \quad \text{et} \quad d = 2 + 2i.$$

Quelle est la nature du triangle ODB ?

4. Soient E et F les points d'affixes respectives $e = 1 - i\sqrt{3}$ et $f = 1 + i\sqrt{3}$.
Quelle est la nature du quadrilatère OEAF ?
5. Soit \mathcal{C} le cercle de centre A et de rayon 2. Soit \mathcal{C}' le cercle de centre A' et de rayon 2.
Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$
 - a) On désigne par E' l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' du point E'.
 - b) Démontrer que le point E' est un point du cercle \mathcal{C}' .
 - c) Vérifier que : $e - d = (\sqrt{3} + 2)(e' - d)$. En déduire que les points E, E' et D sont alignés.
6. Soit D' l'image du point D par la rotation r . Démontrer que le triangle EE'D' est rectangle.