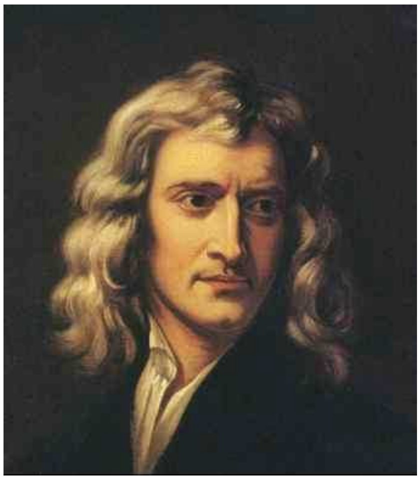
Quatrième Leçon

DÉRIVATION



Résumé Après avoir découvert la notion de limite et son formalisme né au XIX^e^ siècle, notre héros remonte le temps et se retrouve en eaux troubles, entre physique et mathématiques...

A POURQUOI DÉRIVER ?

A 1 L'Anglais et le Continent ou la bataille de la tangente

Mathémator : Nous allons aborder aujourd'hui une notion qui échauffa tant d'esprits qu'elle faillit déclencher une guerre. Replaçons-nous dans le contexte : nous sommes au XVII^e^ siècle, Descartes, Pascal, Fermat, Huygens et d'autres tournent autour de la notion de tangente à une courbe et sentent que ce problème pourrait déboucher sur un bouleversement complet de la science.

Téhessin : Quelle tension ! Vite, la suite !

Mathémator : Inspirés par ces aînés, Leibniz l'Allemand et Newton l'Anglais vont publier indépendamment l'un de l'autre [a] deux présentations de la dérivée d'une fonction et de son lien avec la tangente à une courbe. Pas entièrement rigoureux car ils utilisent la notion de limite un peu empiriquement sans la démontrer [b], leurs travaux constituent la base de la notion de calcul infinitésimal que vous étudiez au lycée. Qui fut le premier ? Quelle théorie est la meilleure ? Coups bas, insultes ont fusés de part et d'autre de la Mer du Nord pour répondre à ces questions.

A 2 Newton et la vitesse

Mathémator : Mon petit Théhessin, pressé d'aller résoudre quelques exercices de maths, vous roulez un peu trop vite avec votre 309 custom et vous vous faites contrôler à 145 km/h rue du Château : s'agit-il d'une vitesse moyenne ou d'une vitesse instantannée ?

Téhessin : Ben instantannée : c'est la vitesse qu'avait la voiture au moment où le flash s'est déclenché.

Mathémator : Mouais. Parlons d'abord de la vitesse moyenne : pour un mouvement rectiligne, c'est le rapport entre la différence des abscisses et le temps mis pour la parcourir

$$V_{moy} = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Téhessin : Pour la vitesse instantanée, il suffit de prendre un intervalle de temps Δt extrêmement petit : malgré la puissance du moteur de ma 309, sa vitesse ne changera pas beaucoup en, disons, une milliseconde.

---

a. Vous savez, il était un temps où les hommes n'avaient pas l'ADSL
b. Il faudra encore attendre deux siècles

Mathémator : Je vous l'accorde, mais vous raisonnez comme un scientifique du XVIIᵉ siècle, ou comme un physicien. Vous dites

$$\mathrm{V}(t) \approx \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{t+\Delta t-t} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

pour Δt suffisamment petit. Mais depuis, les mathématiciens ont défini rigoureusement la notion de limite et ils préfèrent dire

$$\mathrm{V}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

Téhessin (à part) : *Ouais, bon, c'est pareil*

Mathémator : Je vous sens dubitatif, mais qu'est-ce que veut dire « petit » ? Avez-vous une définition valable ? Une milliseconde, c'est peu pour nous, mais c'est énorme pour un quark qui peut avoir une vie de $10^{-24}s$... En mathématiques, nous préférons la notion «d'aussi petit que l'on veut » qui est plus rigoureuse.

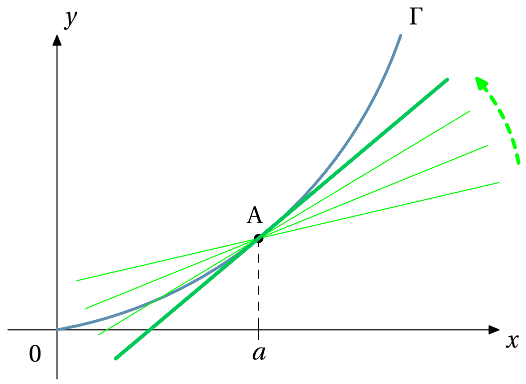
A 3 Leibniz et la tangente

Mathémator : Comme je vous le disais, le problème de la tangente intrigait les mathématiciens du XVIIᵉ . Fermat avait résolu le problème de la « touchante » comme à son habitude, sur un cas particulier, de manière algébrique et au prix de pas mal de ce qui nous apparaît comme des tours de passe passe (je divise par h et ensuite je suppose que $h = 0$ mais ce genre de magouilles hante les traités actuels de mathématiques financières...). Leibniz a eu le mérite d'introduire des notations et des formulations claires.

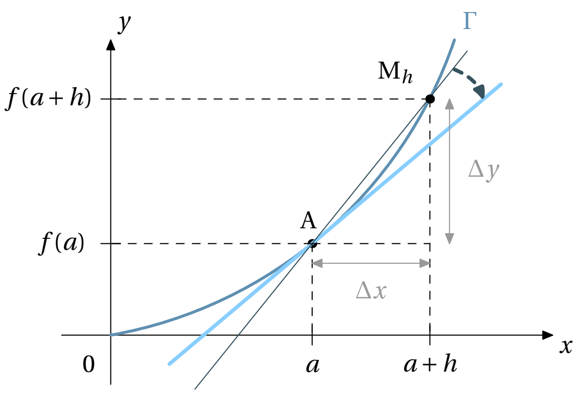
Téhessin : Mais qu'est-ce qu'une tangente ? On l'avait définie l'année dernière à l'aide des dérivées.

Mathémator : Une tangente, ou une « touchante » comme disait Fermat, était définie au XVIIᵉ comme une « droite limite » qui ne « toucherait » la courbe localement qu'en un seul point [c].

Téhessin : Je me souviens : on fait tourner des droites autour d'un point



Mathémator : Voilà, mais il faut être un peu plus précis pour comprendre l'intuition de Leibniz (et d'autres)



La pente de la droite (AM_h) vaut

c. Aujourd'hui, la notion de tangente n'est plus uniquement liée à une droite, mais se définit à partir d'une limite

$$p_h = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{M_h} - y_A}{x_{M_h} - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

L'idée est alors que plus h sera petit, plus la droite (AM_h) se rapprochera de la tangente, et plus p_h se rapprochera de la pente de la tangente.
Pour nous, grands mathématiciens du XXI[e] siècle, il suffit donc de faire tendre h vers 0 et de prendre la limite de p_h, si elle existe.

$$p = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A 4 Qu'est-ce que la dérivée d'une fonction en un point ?

Mathémator : Les deux problèmes que nous venons de voir, ceux de la vitesse instantanée et de la tangente, vous ont convaincu, j'espère, de l'importance fondamentale en mathématiques et en physique de la limite du taux d'accroissement d'une fonction. Il fallait absolument lui donner un nom.

Définition IV - 1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit a un élément I.
On dit que f **est dérivable en a** lorsque le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. Cette limite est alors appelée **dérivée de f en a**, et est notée $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

ou encore

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ainsi, la vitesse instantanée $V(t)$ n'est autre que $x'(t)$, la dérivée en t de la fonction position x. Et la pente de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse a est égale à $f'(a)$, la dérivée de f en a.

D'où vient la notation $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$?

En physique, vous employez plus volontiers la notation $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ alors qu'en mathématiques, nous privilégions la notation $y'(x)$.
D'une part, l'une est due à Leibniz, l'autre à Lagrange. D'autre part, la première est liée à la figure précédente : la pente de la tangente ressemble à $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand ces grandeurs deviennent infiniment petites. Devenu infiniment petit, le Δ devient d et la pente devient donc $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. C'est une vision intuitive, qui « marche » pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais trop restrictive pour le mathématicien qui est amené à travailler avec des fonctions vectorielles dans des espaces de dimension quelconque (!). Pour le mathématicien, $\mathrm{d}y$ est alors une fonction de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des fonctions linéaires de l'ensemble de départ dans l'ensemble d'arrivée, et le $\mathrm{d}y$ du physicien sera plutôt $\mathrm{d}y_x(h)$, if you see what I mean...

A 5 Comment calculer la dérivée d'une fonction en a ?

Téhessin : Ben vous venez de le dire, avec un calcul de limite.

Mathémator : Ah bé dame, c'est sûr. Y a plus qu'à s'y mettre. Considérez la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0, +\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

Calculez $f'(a)$ pour tout réel a.
Téhessin : Et bien

$$p_h = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

En développant $(a+h)^2$, on a

$$p_h = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = 2a+h$$

et on en déduit que la dérivée de f existe pour tout réel a et vaut

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} p_h = 2a$$

Incroyable ! On retrouve la formule.

Mathémator : On peut même s'occuper de la fonction inverse, de la dérivée d'un produit, d'un quotient, d'une composée : je vous laisse vous en occuper à titre d'exercice...

A 6 Une fonction continue en a est-elle dérivable en a et vice versa ?

Mathémator : Les travaux de Newton, Leibniz & Co utilisaient des fonctions qui étaient implicitement continues, mais on peut se demander si une fonction dérivable en a est forcément continue en a et ziozerouairaounede.

Téhessin : Je sens comme eux que si la fonction n'est pas continue en a, on va avoir du mal à tracer une tangente. Je suppose que vous voulez un contre-exemple...disons, la fonction signe

$$\text{signe}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

Cette fonction n'est pas continue en 0, et le taux d'accroissement

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} 1/x & \text{si } x > 0, \\ -1/x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

n'a pas de limite ni à gauche, ni à droite de zéro.

Mathémator : Il semblerait donc que si f n'est pas continue en a, alors f n'est pas dérivable en a. Ce qui reviendrait à dire avec un brin de logique [d] que la dérivabilité en a entraîne la continuité en a.

Supposons donc que f soit dérivable en a, alors $\tau_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie qu'on note $f'(a)$. Pour prouver que f est continue en a, il faut prouver que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Nous connaissons $\tau_a(x)$, nous cherchons $f(x)$, nous allons donc exprimer $f(x)$ en fonction de $\tau_a(x)$.
On obtient, pour tout $x \neq a$

$$f(x) = f(a) + (x-a)\tau_a(x)$$

Or $\lim\limits_{x\to a} \tau_a(x) = f'(a)$ et $\lim\limits_{x\to a}(x-a) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to a}(x-a)\tau_a(x) = 0$ par produit et finalement, par somme des limites on a

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Propriété IV - 1 :
Continuité des fonctions dérivables
Toute fonction dérivable en a est continue en a

Maintenant, que pensez-vous de la réciproque ?

Téhessin : Est-ce qu'une fonction continue en a est dérivable en a ? Je pense que non, sinon il ne servait à rien d'inventer la dérivabilité.

Mathémator : Je vais vous proposer un contre exemple qui répondra aussi à la question suivante :

d. Il revient au même de dire « A implique B » et « contraire de B implique contraire de A ». À méditer...

A 7 Comment interpréter graphiquement la non-dérivabilité de f en a ?

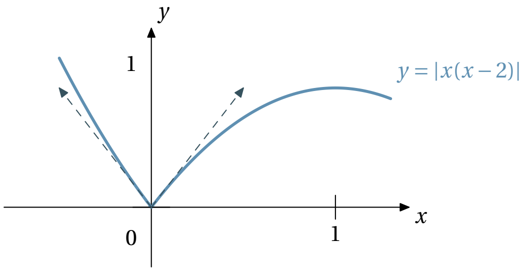
Mathémator : Comme pour la continuité, la dérivabilité est liée à l'existence d'une limite. Trois cas sont donc à étudier.

A 7 a Le taux de variation admet une limite à gauche et une limite à droite distinctes

Mathémator : Voici une fonction qui illustre notre propos et qui sert en même temps de contre-exemple à la question du paragraphe précédent

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x(x-2)| \end{array}$$

et observons la configuration en aile de mouette :



Étudiez la dérivabilité de f en 0.

Téhessin : Il suffit d'étudier le taux de variation

$$\tau_0(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x(x-2)|}{x} = \begin{cases} x-2 & \text{si } x>0 \\ 2-x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

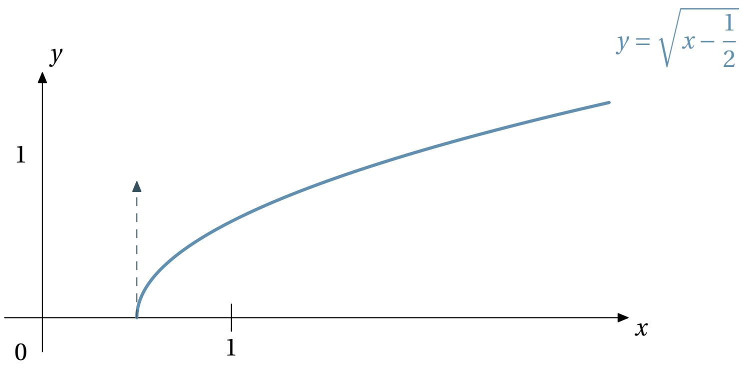
Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \tau_0(x) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \tau_0(x) = 2$: le taux de variation n'admet pas de limite en 0, donc f n'est pas dérivable en 0.

Mathémator : C'est parfait ! Mais le fait que des limites existent à gauche et à droite nous permet de dire que f admet **une dérivée à gauche et une dérivée à droite** en 0. Ces dérivées sont les pentes des **demi-tangentes** en 0.

A 7 b Le taux de variation admet une limite infinie en a

Mathémator : Cette fois-ci, étudions la fonction bien connue

$$f : \begin{array}{ccc} \left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x-\frac{1}{2}} \end{array}$$



Téhessin : J'étudie le taux de variation en 1/2

$$\tau_{1/2} = \frac{f(x)-f(1/2)}{x-1/2} = \frac{\sqrt{x-1/2}}{x-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x-1/2}}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1/2} \tau_{1/2}(x) = +\infty$ et là encore la fonction n'est pas dérivable en 1/2.

Mathémator : C'est du bon boulot. J'ajouterai juste que dans ce cas, la courbe admet au point d'abscisse 1/2 une tangente verticale : la pente tend en effet vers l'infini.

A 7 c La taux de variation n'admet pas de limite en a

Mathémator : Pour ce cas plus pathologique, nous n'avons pas de contre-exemple à notre portée : il faudrait trouver une fonction continue en a mais dont le taux n'admette pas de limite en a. Mais ces fonctions existent [e]. Vous montrerez même peut-être un jour que « la plupart » des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ne sont dérivables nulle part, mais ceci est une autre histoire...

Propriété IV - 2 :
Limite du taux de variation et tangente
Pour résumer, en appelant $\tau_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$,

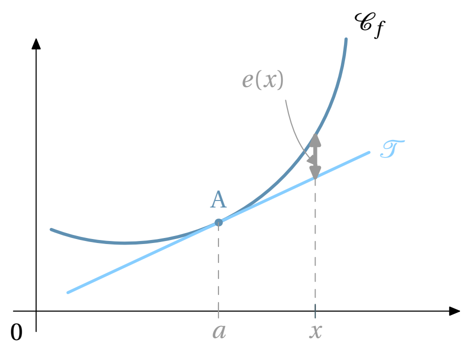
- si $\lim\limits_{x\to a} \tau_a(x) = \ell$, $\mathcal{C}_f$ admet la droite de pente a et passant par le point de coordonnées $(a, f(a))$ comme tangente au point d'abscisse a. Une équation de la tangente est donc

$$y = (x-a)f'(a) + f(a)$$

- si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} \tau_a(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \tau_a(x)$, $\mathcal{C}_f$ admet deux demi-tangentes de pentes les limites à gauche et à droite de $\tau_a(x)$ au point d'adscisse a ;
- si $\lim\limits_{x\to a} \tau_a(x) = \infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse a

A 8 L'idée fondamentale du calcul différentiel : l'approximation locale des fonctions par des fonctions affines

Mathémator : À l'aide du dessin ci-dessous, essayons d'estimer l'erreur faite en remplaçant $\mathcal{C}_f$ par $\mathcal{T}$ localement au voisinage de a



Pour un x donné, l'erreur vaut

e. Vous pourrez regarder l'exposé de Denis Choimet sur la dérivabilité de la fonction de Riemann $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$ à l'adresse http://denis.choimet.free.fr/exposes/riemann.pdf

$$e(x) = f(x) - \Big(f(a) + (x-a)f'(a)\Big)$$

puisque vous connaissez une équation de la tangente $\mathcal{T}$.
Maintenant, abordons une notion que Leibniz n'avait pas su rigoureusement traiter. On « sent » que plus x va se rapprocher de a, plus $e(x)$ sera « petit », mais comment définir ce terme ? Vous vous doutez qu'une fourmi est « petite » par rapport au système solaire mais « grande » par rapport à un quark, donc la notion de $e(x)$ devient petit ne peut nous satisfaire. Alors observons.
En ré-écrivant la relation, on obtient

$$f(x) = \underbrace{f(a)}_{\text{constante}} + \underbrace{(x-a)\times f'(a)}_{\text{de l'ordre de } x-a} + e(x)$$

Il faudrait donc connaître l'ordre de $e(x)$ par rapport à $(x-a)$. Pour cela on étudie leur rapport

$$\lim_{x\to a}\frac{e(x)}{(x-a)} = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right) = 0$$

d'après la définition de $f'(a)$ puisqu'on suppose que f est dérivable en a. Donc l'erreur $e(x)$ est « petite » ou « négligeable » devant $x-a$. On peut alors écrire

Propriété IV - 3 :
Approximation locale d'une courbe par sa tangente
Au voisinage de d'un nombre a où f est dérivable,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)e(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to a} e(x) = 0$$

On pourra retenir une formulation mnémotechnique mais peu rigoureuse

$$f(x) \underset{a}{\approx} f(a) + (x-a)f'(a)$$

On peut donc localement approcher une fonction dérivable par une fonction affine, ce qui peut pas mal nous simplifier la vie pour étudier son comportement ou la modéliser.

Considérons par exemple la fonction $f : \begin{array}{ccc} [-1,+\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$ et étudions la au voisinage de 0. On obtient facilement $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1/2$, donc

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + xe(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} e(x) = 0$$

Vérifions par le calcul

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1+1/1000} & \approx & 1,000499875 \\ 1+1/2000 & = & 1,0005 \end{array}$$

Donc l'erreur commise est de l'ordre de $1,25\times 10^{-7}$, c'est à dire vraiment négligeable devant x qui vaut 10^{-3}.
Cette propriété inspira Euler qui s'en servi pour obtenir un tracé approximatif de solutions d'équations différentielles comme nous le verrons bientôt.

B DÉRIVÉE ET VARIATIONS DES FONCTIONS

B 1 Qu'est-ce qu'une fonction dérivable sur un intervalle ?

Mathémator : C'est bien sûr une fonction qui est dérivable en chacun des points de l'intervalle. On peut alors associer à f une fonction dérivée, qu'on note habituellement f', et qui à chaque x de I associe le nombre dérivée de f en x.
On a bien sûr les mêmes théorèmes généraux sur les combinaisons de fonctions dérivables que pour les fonctions continues, car c'est encore un problème de limites.

B 2 Quel est le signe de la dérivée d'une fonction croissante sur une partie de $\mathbb{R}$?

Mathémator : Je vous rappelle la définition d'une fonction croissante sur une partie D

Définition IV - 2 :

Fonction croissante sur une partie D
Une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est **croissante** lorsque

$$\text{pour tout couple } (x,y) \in \mathrm{D}^2 \quad x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

Il est facile de voir que c'est équivalent à

$$\text{pour tout couple } (x,y) \in \mathrm{D}^2 \quad x \neq y \Longrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0,$$

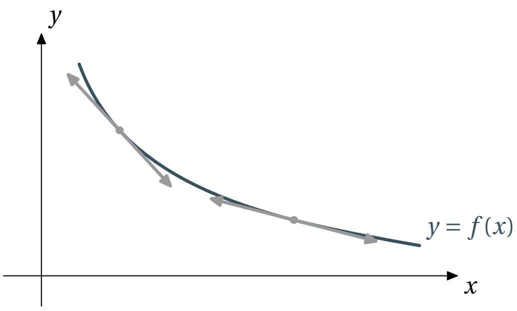
ou encore au fait que tous les taux d'accroissements sont positifs ou nuls.
Donc, par un simple passage à la limite, on en déduit que si f est croissante et dérivable, alors f' est positive. Et de même, si f est décroissante et dérivable, alors f' est négative.

B 3 Une fonction dont la dérivée est négative est-elle décroissante ?

Téhessin : C'est ce qu'on vient de dire !

Mathémator : Attention brave Téhessin ! Nous venons de montrer qu'une fonction croissante sur D a une dérivée positive sur D. Le problème qui nous occupe maintenant est la réciproque.

Téhessin : Ben c'est pareil : si par exemple, f est dérivable et f' toujours négative, alors les tangentes au graphe de f ont toutes une pente négative. On doit pouvoir en déduire que f est décroissante.



Mathémator : Ça peut être bon, mais vous oubliez un détail : il va falloir regarder l'ensemble D sur lequel on travaille de plus près. Par exemple, la fonction inverse $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array}$ a une dérivée $-1/x^2$ toujours négative mais elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ puisque $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} > 0$

Téhessin : C'est encore une histoire d'intervalle...

Mathémator : Effectivement ! Une nouvelle fois, retenez bien qu'il est extrêmement important de savoir sur quel ensemble on travaille : pour une même fonction, une propriété vraie sur un ensemble peut être fausse sur un autre.
Pour le cas qui nous intéresse, il nous est impossible à notre niveau de prouver que sur un intervalle notre proposition devient vraie. Nous l'admettrons donc.

Téhessin (à part) : *Ça fait toujours une question de cours en moins...*

Mathémator : Et comme une fonction est constante si et seulement si elle est à la fois croissante et décroissante, on en déduit que f est constante si et seulement si $f' = 0$. On peut donc énoncer ce théorème fondamental.

Théorème IV - 1 :

Sens de variation et signe de la dérivée

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable de I vers $\mathbb{R}$. Alors

- f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.
- f est décroissante si et seulement si $f' \leqslant 0$.
- f est constante si et seulement si $f' = 0$.

B 4 Comment montrer qu'une fonction est strictement croissante ?

Téhessin : D'après ce que vous m'avez dit, il faudra s'intéresser au cas où la fonction est dérivable sur un intervalle I. Maintenant, je suppose qu'il faut que la dérivée soit strictement positive.

Mathémator : Ici encore, faites attention aux mots que vous employez. D'abord, rappelons la définition

Définition IV - 3 :

Fonction strictement croissante sur une partie D

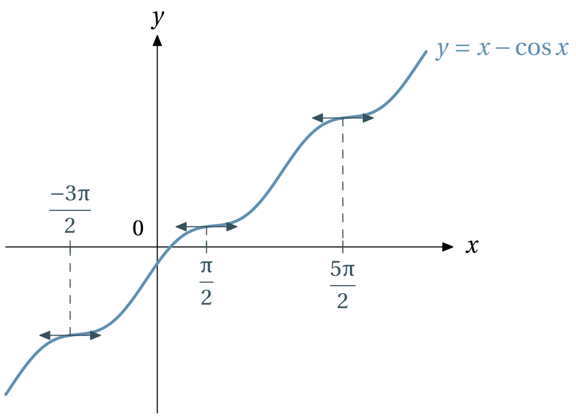
Une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est **strictement croissante** lorsque

$$\text{pour tout couple } (x, y) \in \mathrm{D}^2 \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

On comprend bien qu'il SUFFIT que la dérivée soit strictement positive pour que ça marche. Mais ce n'est pas NÉCESSAIRE. Considérez en effet la fonction cube qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pouratnt sa dérivée s'annule en 0.

Téhessin : Bon, ben je propose : f positive, ne s'annulant qu'en un nombre fini de points.

Mathémator : C'est suffisant mais ce n'est toujours pas nécessaire comme on le voit sur le dessin suivant



Téhessin : Pffff...Ouais, bon, allez-y, étalez votre science.

Mathémator : Ne le prenez pas mal ! Voici le résultat

Théorème IV - 2 :

Fonction strictement croissante sur un intervalle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable de I vers $\mathbb{R}$. Alors f est strictement croissante équivaut à : f' est positive ou nulle et il n'existe pas de segment $[a, b]$ de I avec $a < b$ tel que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

En effet, si f est strictement croissante, alors elle est croissante et donc f' est positive, et d'autre part, f' ne peut pas être nulle en tous les points d'un segment $[a, b]$ avec $a < b$ car sinon, f serait constante sur $[a, b]$.

Réciproquement, supposons les conditions sur f' vérifiées et montrons que f est strictement croissante. On se donne deux éléments x et y de I tels que $x < y$. Alors d'une part $f(x) \leqslant f(y)$ car f est croissante puisque $f' \geqslant 0$. Et d'autre part, l'égalité $f(x) = f(y)$ entraînerait que f est constante sur $[x, y]$ compte tenu de la croissance de f, ce qui ne serait possible que si f' était nulle sur $[x, y]$.

B 5 À quoi sert la stricte monotonie d'une fonction ?

Mathémator : Rappelez-vous du théorème de la solution unique qu'on appelle aussi théorème de la bijection. Pour l'utiliser, il faut être sûr que notre fonction est strictement monotone. Il faut donc pouvoir le vérifier.
Au Bac, il suffira de vérifier sur notre tableau de variation que la « flèche » ne change pas de direction.

Pour les curieux : qu'est-ce qu'une bijection ?

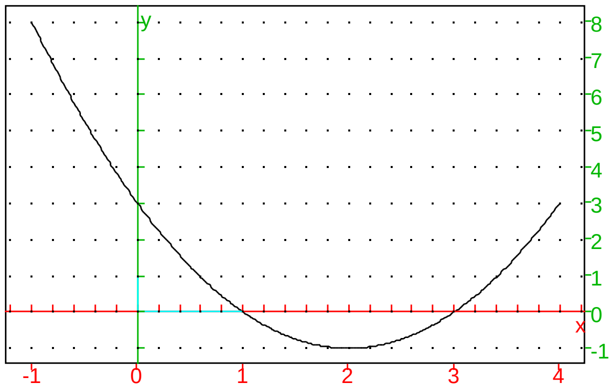
On appelle bijection une application de I sur J telle que tout élément de I admette une image et une seule dans J et que tout elément de J admette un antécédent et un seul dans I. La première partie renvoie à une fonction, la deuxième au théorème de la solution unique.

Quand tout l'ensemble d'arrivée est décrit par les images (quand f(I)=J), on dit que f est *surjective*.
Quand un élément de l'ensemble d'arrivée n'admet qu'un antécédent dans l'ensemble de départ, on dit que f est *injective*. On le vérifie en montrant que $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.

B 6 Que dire de la dérivée en un extremum local ?

Intuitivement, si une fonction f dérivable sur un intervalle admet sur cet intervalle un minimum en x_0, la fonction va décroître vers $f(x_0)$ puis croître ensuite et donc il semble que $f'(x_0)$ va être nul.
Observons quelques cas avec XCAS :

```
graphe((x-2)^2-1,x=-1..4)
```

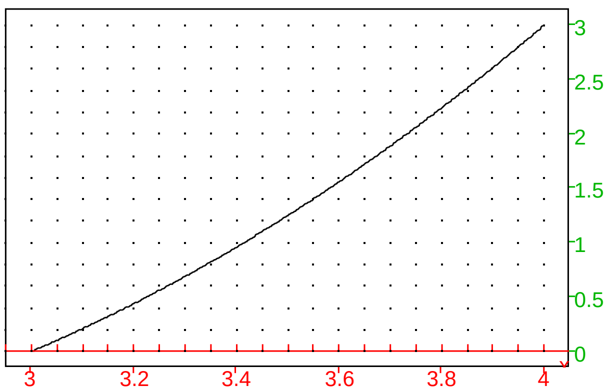



```
resoudre(derive((x-2)^2-1)=0,x)
```

[2]

Cela semble fonctionner. Mais observons ceci :

```
graphe((x-2)^2-1,x=3..4)
```



Le minimum est atteint en 3 car f est strictement croissante sur $[3,4]$ et pourtant $f'(3) \neq 0$.
Il faut donc distinguer le cas où x_0 est une extrémité de l'intervalle des autres cas.
Supposons donc que x_0 soit un point intérieur à un intervalle I, que f soit dérivable en x_0 et que, par exemple, f admette un minimum local en x_0.
Cela veut dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset \mathrm{I}$ et

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \; f(x) \geqslant f(x_0)$$

Le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est donc négatif sur $[x_O - \alpha, x_0]$ et positif sur $[x_O, x_0 + \alpha]$.
Il en est donc de même de ses limites à gauche et à droite en x_0. Or la fonction f étant dérivable en x_0, ces deux limites sont égales à $f'(x_0)$ et donc on a $f'(x_0) \leqslant 0$ et $f'(x_0) \geqslant 0$. On en déduit que $f'(x_0) = 0$.

Théorème IV - 3 : extremum
Soit I un intervalle ; soit x_0 un élément de I qui ne soit pas une extrémité de I. Soit f une fonction définie sur I et dérivable en x_0.
SI f admet un extremum local en x_0, ALORS $f'(x_0) = 0$.

B 7 Dérivée de fonctions composées

Mathémator : Comment dériver la fonction $h \;:\; x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$?

Téhessin : ? ? ? ? Cela dépasse mes capacités !

Mathémator : Ne soyez pas si modeste. Considérons une fonction g dérivable en x_0 et une fonction f dérivable en $g(x_0)$ qu'on notera $g(x_0) = y_0$.
Introduisons maintenant la fonction φ définie par :

$$\begin{cases} \varphi(u) = \frac{f(u)-f(y_0)}{u-y_0} & \text{si } u \neq y_0 \\ \varphi(y_0) = f'(y_0) \end{cases}$$

Que pensez-vous de la continuité de φ en y_0 ?

Téhessin : Comme f est dérivable en y_0, alors

$$\lim_{u \to y_0} \frac{f(u) - f(y_0)}{u - y_0} = f'(y_0)$$

ce qui assure que $\lim\limits_{u \to y_0} \varphi(u) = \varphi(y_0)$ et donc la continuité de f en y_0.

Mathémator : Parfait ! L'avantage de cette fonction est que, pour tout $x \neq x_0$:

$$\frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{x - x_0} = \varphi(g(x)) \times \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

On peut prendre la limite du membre de droite en x_0 car φ est continue en $g(x_0)$ et que f est dérivable en x_0.
On obtient donc le résultat suivant :

Théorème IV - 4 :
Dérivée d'une composée
Si g est dérivable en x_0 et f dérivable en $g(x_0)$ alors la fonction composée $f \circ g$ est dérivable en x_0 et

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \times g'(x_0)$$

Appliquez cette formule à notre exemple.

Téhessin : Ici, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $1 + x^2$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Avec $f(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{X}}$ et $g(x) = 1 + x^2$, on obtient $f'(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{X}}}$ et $g'(x) = 2x$, donc

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \times 2x$$

Mathémator : En fait, on dérive comme si $g(x)$ était une variable et on multiplie par la dérivée de « l'intérieur ».

On obtient comme ça tout un tas de formules rappelées dans le tableau de fin de chapitre.

B 8 Peut-on étudier les variations d'une fonction sans calculer sa dérivée ?

Mathémator : Grâce au théorème précédent, je réponds oui à la question précédente. En effet, si f et g sont dérivables là où il faut, $(f \circ g)'$ sera du signe du produit des dérivées de f et g. Donc

Théorème IV - 5 :
Sens de variation d'une composée
Si g est dérivable sur I et f dérivable sur $g(\mathrm{I})$, alors
- La composée de deux fonctions croissantes est croissante
- La composée de deux fonctions décroissante est croissante
- la composée d'une fonction, croissante et d'une fonction décroissante est décroissante

Téhessin : C'est comme la règle des signes !

Mathémator : Bien sûr puisque ça en découle !

Par exemple, pour la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$$

La fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc comme la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t}$ est croissante, f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a juste utilisé que la composée de deux fonctions croissantes est croissante, et que la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

C TABLEAU RÉCAPITULATIF DES DÉRIVÉES

$f(x) =$	$f'(x) =$	intervalle de validité
$a \in \mathbb{R}$		
x^n pour $n \in \mathbb{N}$		
$\frac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$		
$\sqrt{x}$		
x^α, $\alpha \in \mathbb{Q}$		
$\cos x$		
$\sin x$		
$\tan x$		
$u + v$		
$\lambda u, \ \lambda \in \mathbb{R}$		
uv		
$\frac{u}{v}$		
$u \circ v$		
u^k		
$\frac{1}{u}$		
$cos(u)$		

D EXERCICES

Exercice IV - 1 Une preuve de la divergence de certaines suites géométrique

1. Montrez que, pour tout réel positif x et tout entier naturel non nul n, on a

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$

déterminez le signe de $(1+x)^n - 1 - nx$ en étudiant une fonction.

2. Que peut-on en déduire concernant les suites géométriques ?

Exercice IV - 2 Étude d'une fonction irrationnelle avec problème de dérivabilité en un point.

Étudiez et représentez graphiquement la fonction

$$f \ : \ x \to \frac{2}{5}\sqrt{25-x^2}$$

pour la dérivabilité en 5, utilisez la limite du taux d'accroissement.

Exercice IV - 3 Étude d'une fonction trigonométrique.

Étudiez et représentez graphiquement la fonction

$$f \ : \ x \to \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

commencez par régler les problèmes de définition, de périodicité et de parité.

Exercice IV - 4 Dans l'esprit du Bac...

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2+1}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. On pose $g(x) = x^3+3x+8$.

a) Étudiez le sens de variation de g et montrez que l'équation $g(x)=0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont vous donnerez un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

emploi classique du théorème de la bijection.

b) Précisez le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2. a) Étudiez les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Calculez $f'(x)$ et dressez le tableau de variation de f.

3. a) Montrez qu'il existe quatre réels a, b, c, et d tels que

$$f(x) = ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

b) Déduisez en que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique Δ et étudiez la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à Δ.
Vérifiez en particulier que $(\mathcal{C})$ rencontre Δ en un unique point Δ.

4. Déterminez les abscisses des point B et B′ de $(\mathcal{C})$ admettant une tangente parallèle à Δ.

deux droites parallèles ont le même coefficient directeur...

5. a) Vérifiez que $f(\alpha) = 3\alpha/2$. Déduisez en une valeur approchée de $f(\alpha)$.

utilisez le fait que $g(\alpha) = 0$.

b) Tracez Δ, $(\mathcal{C})$ ainsi que les points A, B, B′ et M, N, P d'abscisses respectives 1, 2 et -1, sans oublier les six tangentes en ces points.

Exercice IV - 5 ROC : dérivée d'une composée

1. **Restitution organisée de connaissances**
   La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si vraie ou fausse et justifier.
   Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.
   – P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.

   – Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.
2. On désigne par g la fonction définie sur $]-1\ ;\ 1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\ ;\ 1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.
   On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi\ ;\ 0[$ par
   $h(x) = g(\cos x)$.
   a) Démontrer que pour tout x de $]-\pi\ ;\ 0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.
   b) Calculer $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

Exercice IV - 6 Bac suisse

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x^4}{x^3-1}.$$

1. Étudier la fonction f. Durant l'étude, vous montrerez que la dérivée seconde est la suivante :

$$f''(x) = \frac{12x^2\left(x^3+2\right)}{\left(x^3-1\right)^3}$$

2. Déterminer la pente de la tangente au point d'inflexion (le point d'abscisse x tel que $f''(x) = 0$).
3. Représenter graphiquement la fonction f (unité : 2 carrés ou 1 cm sur feuille millimétrée).

Exercice IV - 7 Bac espagnol

Sea f la función definida para $x \neq -2$ por

$$\frac{x^2}{x+2}$$

1. Halla las asintotas de la gráfica de f.
2. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos locales de f.
3. Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica de f.

Exercice IV - 8 Bac espagnol

Dada, la curva $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$ se pide :

1. Dominio de définición y corte a los ejes.
2. Simetrias.
3. Asintotas.
4. Posibles extremos de la función que define a la curva.
5. Con los anteriores datos obtener ura representación aproximada de la curva

Exercice IV - 9 Bac irlandais

1. If $y = x - 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$, find the value of $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ at the point $(4;2)$.
2. The slope of the curve $y = a\sqrt{x} - 5$ at the point $(4;b)$ is 2. Find the values of a and b.
3. If $y = \sqrt{x}$, show that $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{4}y = 0$.

Exercice IV - 10 Bac anglais

1. Find the coordinates of the turning points on the curve whose equation is $y = x^3 - 9x^2 + 24x$
2. The function f is given by :
$$f(x) = x + \frac{1}{4x}, \quad x \neq 0$$
   Find the range of values of x for which f is an increasing function of x.
3. Differentiate with respect to x $4\sin^3(2x)$.
4. The curve $\mathcal{C}$ has equation $y = \frac{2x}{1+x^2}$. Find the coordinates of the stationary points and distinguish between them.

Exercice IV - 11 Bac polonais

Zbadaj monotoniczność i ekstrema następujących funkcji $y = \frac{x}{x^2-5x+4}$.

Exercice IV - 12 Résolution analytique d'un problème géométrique. Extremum d'une fonction.

Un triangle ABC isocèle, de sommet principal A, est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1. H est le pied de la hauteur issue de A. On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{\mathrm{HOC}}$. On suppose enfin que $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

1. a) Exprimez BC et AH en fonction de α.

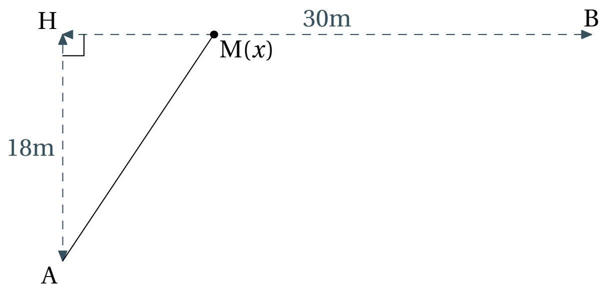
   dʎɥlpɐsoɔ dʎɥddouᴉs

   b) En déduire, en fonction de α, l'aire du triangle ABC.
2. On considère la fonction f définie sur $[0, \pi/2]$ par
$$f(\alpha) = \sin\alpha(1 + \cos\alpha)$$
   Calculez la dérivée f' de f et prouvez que, pour tout réel α de $[0, \pi/2]$, on a $f'(\alpha) = 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1$
3. a) Factorisez le polynôme $2X^2 + X - 1$ et en déduire une factorisation de $f'(\alpha)$

   b) Dressez alors le tableau de variations de f.
4. Démontrez qu'il existe une valeur de α, que vous déterminerez, pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale. Précisez ce maximum. Quelle est alors la nature du triangle ABC ?

Exercice IV - 13 Problème d'optimisation : les dents de la mer XXXII

Albert est un fervent adepte de la plongée sous-marine. Alors qu'il se trouve en A et s'émerveille devant la beauté du paysage aquatique, il aperçoit au loin un requin d'une taille qui le dissuade de poursuivre plus avant son exploration des fonds marins et décide de rejoindre son bateau situé en B. À quel endroit doit-il rejoindre la surface pour que le temps de parcours soit minimal ?



Grâce à l'adrénaline secrétée par la portion médullaire de ses glandes surrénales, Albert se déplace à la vitesse de $7,2\,km.h^{-1}$ sous l'eau et à la vitesse de $9\,km.h^{-1}$ en surface. On supposera que la surface de l'eau est rectiligne, que la dérive due au courant est nulle et que la trjectoire d'Albert est une ligne brisée.

Exercice IV - 14 Une fonction avec valeur absolue

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{|x^2 + 4x - 5|}$$

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

1. Écrivez $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue.
2. Montrez que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = -2$ comme axe de symétrie. Que peut-on en déduire sur le domaine d'étude de f.
3. Étudiez les variations de f là où elle est dérivable.
4. Étudiez la dérivabilité de f en 1. Interprétez graphiquement.
5. Calculez $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$. Interprétez graphiquement.
6. Tracez $\mathcal{C}_f$. Vous prendrez 1cm comme unité en abscisse et 2cm en ordonnées. Vous prendrez soin de tracer les tangentes remarquables.

Exercice IV - 15 Équations fonctionnelles

Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Nous en étudierons bientôt deux exemplaires en cours :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y) \qquad \text{et} \qquad f(xy) = f(x) + f(y)$$

Pour l'heure, nous allons nous contenter de rechercher les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Les deux parties sont indépendantes.

PARTIE A

1. Montrez que pour tout entier naturel n, $f(n) = n \times f(1)$
2. Montrez que pour tout entier naturel non nul p, $f(1) = p \times f(1/p)$.
3. Déduisez-en que pour tout rationnel r, $f(r) = r \times f(1)$

PARTIE B

On suppose que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = a$.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)/x$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = a$.

1. Calculez $f(0)$.
2. Montrez que g est continue en 0.
3. Montrez que $g(2x) = g(x)$ pour tout réel x.
4. Déduisez-en que $g(x) = g(x/2^n)$ pour tout réel x et tout entier naturel n.
5. Déduisez-en que g est une fonction constante.

Où on utilise enfin un théorème oublié du cours sur la continuité

6. Déduisez-en une expression de $f(x)$ pour tout réel x en fonction de a.
7. Réciproquement, vérifiez que les fonctions trouvées à la question 5) sont solutions du problème. Concluez. Comparez avec les résultats de la partie A.

Exercice IV - 16 Paramètres

On munit le plan d'un repère orthonormé.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé.

a) Étudiez les variations de f.

b) Factorisez $f(x)$.

c) Démontrez que pour tout $x \in [0,1]$

$$(f \circ f)(x) = x$$

d) Construisez la courbe $(\mathcal{C})$.

2. On considère les points A_k de coordonnées $(k+1/2,\ 0)$ et B_k de coordonnées $(0,\ 1/2-k)$ où k est un paramètre réel de l'intervalle $[-1/2, 1/2]$.

On note D_k la droite déterminée par les points A_k et B_k.

a) Déterminez une équation de D_k sous la forme $a(k)x + b(k)y + c(k) = 0$ où a, b et c sont trois fonctions dérivables de la variable k que l'on déterminera.

b) Soit D'_k la droite d'équation $a'(k)x + b'(k)y + c'(k) = 0$ où a', b' et c' désignent les fonctions dérivées respectives de a, b et c.

Vérifiez que, pour toute valeur de k dans $[-1/2, 1/2]$, les droites D_k et D'_k sont sécantes en un point M_k.

Démontrez que les coordonnées de M_k sont

$$x_k = (1/2 + k)^2 \qquad y_k = (1/2 - k)^2$$

c) Démontrez que, lorsque k décrit l'intervalle $[-1/2, 1/2]$, le point M_k décrit la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice IV - 17 Décolage d'une fusée

Un cosmonaute projette d'observer deux étoiles voisines, Alpha et Bêta, mais pas trop près, car, en raison de leurs masses, elles exercent une force d'attraction très importante. Aussi, le cosmonaute doit-il disposer d'assez de carburant, i.e. d'énergie, pour pouvoir s'en éloigner à la fin de sa mission, sinon il resterait à jamais prisonnier d'une de ces étoiles.
La distance entre Alpha et Bêta est de cinq unités spatiales, leurs masses respectives sont de quatre et neuf unités de masse.
On repère Alpha par A, Bêta par B et un point M de la droite (AB) par son abscisse x dans le repère (A,I), I étant le point de [AB] tel que AI mesure une unité spatiale.
On sait que pour tout point M de la droite (AB), l'énergie E (énergie potentielle de gravitation) nécessaire pour quitter cette position et s'éloigner à une grande distance est donnée par la formule

$$\mathrm{E}(x) = \frac{4}{|x|} + \frac{9}{|x-5|}$$

1. Étudiez la fonction E sur $]0, 5[$.

2. Démontrez que, sur l'intervalle $]0, 5[$, la fonction E admet un minimum, que vous déterminerez

– en utilisant les variations de E

– par une méthode algébrique

Quelle conclusion peut en tirer le cosmonaute ?

3. Déterminez les points du segment [AB] d'où le cosmonaute peut repartir s'il dispose de 10 unités d'énergie.

Exercice IV - 18 Étude de $x \mapsto x + \sin x$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f\ :\ x \mapsto x + \sin x$$

1. La fonction f est-elle paire ? impaire ? périodique ?

2. Étudiez le sens de variation de f.
3. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$. Interprétez graphiquement.
4. Montrez qu'on peut encadrer f par deux fonctions affines.
5. Calculez la limite de f en $+\infty$.
6. Étudiez les points d'intersection de la courbe avec les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations respectives $y = x$, $y = x+1$ et $y = x-1$.
7. Montrez que si f admet la droite D d'équation $y = ax+b$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ existe et vaut a et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax$ existe et vaut b.
8. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis étudiez le comportement de $f(x) - x$ au voisinage de $+\infty$. Interprétez graphiquement.
9. Représentez graphiquement f sur $[0, 3\pi]$ (1 unité $\mapsto$ 2cm en ordonnée et π unités $\mapsto$ 4cm en abscisse). Vous représenterez les droites d_1, d_2 et d_3, la tangente à l'origine, les tangentes horizontales.

Exercice IV - 19 Limite et taux de variation

Calculez $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+32} - \sqrt{32}}{x}$ en utilisant un taux de variation. Proposez ensuite une autre méthode.

Exercice IV - 20 Vrai ou faux de concours

Répondez par VRAI ou FAUX aux propositions suivantes en justifiant *brièvement*.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f \ : \ x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$$

1. f est impaire.
2. f est dérivable en 0.
3. La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

Exercice IV - 21 Fonction lipschitzienne

Montrez que la fonction sin est 1-lipschitzienne, c'est à dire qu'elle vérifie pour tous réels x et y

$$\left|\sin x - \sin y\right| \leqslant \left|x - y\right|$$

Montrez que $|\sin t| \leqslant |t|$ et utilisez une bonne formule trigo

Exercice IV - 22 Taux moyen de variation

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrez que si f est dérivable en a, alors $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ existe et est finie.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice IV - 23 Problème de dérivabilité

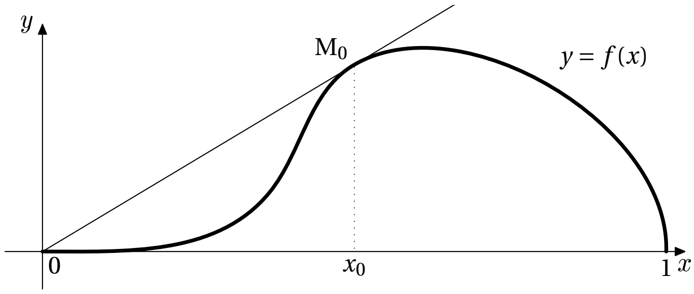
La fonction $f \ : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est-elle dérivable en 0 ?

$\cos(2x) - 1 = -2\sin^2(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)/x = 1$

Exercice IV - 24 La Baleine

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

– f est dérivable sur $[0,1]$;
– $f(0) = f(1) = 0$;
– $f'(0) = 0$.
On veut montrer que l'une des tangentes au graphe de f, autre que la tangente à l'origine, passe par l'origine.



Vous « voyez sur le dessin » que la pente de la droite (OM_0) est maximale. Cela nous incite à introduire une fonction « pente » $g\ : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ dont la dérivée est intéressante.

Exercice IV - 25 Fonction dérivable de dérivée non continue

Montrez que la fonction suivante est dérivable sur $\mathbb{R}$ sans que sa dérivée ne soit continue sur $\mathbb{R}$:

$$f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2 \sin 1/x \text{ si } \ x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

Exercice IV - 26 Style Bac avec ROC

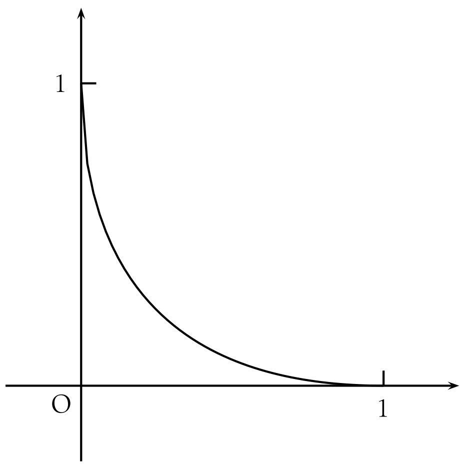
On considère une fonction f définie sur un intervalle I et un nombre réel a appartenant à I.

1. Rappeler la définition de « f est dérivable en a ».

2. Dans chacun des cas suivants, indiquer si les deux propriétés citées peuvent être vérifiées simultanément ou non. Si la réponse est « oui », donner un exemple (un graphique sera accepté) ; dans le cas contraire, justifier la réponse.
   – f est continue en a et f est dérivable en a ;
   – f est continue en a et f n'est pas dérivable en a ;
   – f n'est pas continue en a et f est dérivable en a ;
   – f n'est pas continue en a et f n'est pas dérivable en a.

Exercice IV - 27 Être ou ne pas être un cercle

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$. Cette fonction est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et sa dérivée f' vérifie $f'(1) = 0$. La courbe représentative Γ de la fonction f dans un repère orthonormal est donnée ci-contre.



1. a) Montrer que le point M de coordonnées $(x,\ y)$ appartient à Γ si et seulement si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.
   b) Montrer que Γ est symétrique par rapport à la droite dont une équation est $y = x$.

2. a) Si Γ était un arc de cercle, quel serait son centre ? Quel serait son rayon ?
   b) La courbe Γ est-elle un arc de cercle ?

Exercice IV - 28 Chimie : coefficient de dissociation

L'état d'équilibre de la réaction de dissociation de N_2O_4 peut être caractérisé par la valeur du coefficient de dissociation

α. À la température de 27 ° C, ce coefficient est lié à la pression totale P par la relation :

$$\alpha^2 = \frac{1}{24\mathrm{P}+1}$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{24x+1}}$$

   a) Étudiez le sens de variation de f.
   b) Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ où 1cm représente 0,1 en abscisse et 2cm représentent 0,1 en ordonnée.
   Dans ce repère, tracez la courbe représentative de f.
   c) Montrez que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $[0;1]$. Résolvez cette équation.

2. Dans cette question, on identifie x à la pression totale P et $f(x)$ à α.
   a) On considère que la dissociation de N_2O_4 est pratiquement totale si $\alpha = 0,99$. Déterminez la valeur de la pression correspondante.
   b) De manière plus générale, exprimez P en fonction de α. Pourquoi définit-on ainsi une fonction ? Pouvait-on le prévoir ?
   c) Dressez le tableau de variation de la fonction définie à la question précédente.

Exercice IV - 29 Mouvement dans le champ de pesanteur

On lance un objet d'un point O avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ formant un angle α avec l'horizontale. On se place dans le plan formé par O, $\overrightarrow{v_0}$ et son projeté sur l'horizontale. On considère alors le repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{k}\right)$ où $\vec{\imath}$ dirige l'axe horizontal.
On note M la position de l'objet à un certain temps t et $\left(x;z\right)$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dans $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{k}\right)$ au temps t.
Par application de la relation fondamentale de la dynamique, on obtient :

$$\begin{cases} x = \left(v_0\cos(\alpha)\right)t \\ z = -\frac{gt^2}{2} + \left(v_0\sin(\alpha)\right)t \end{cases}$$

1. Exprimez z uniquement en fonction de x, v_0 et α. On note alors f la fonction qui à x associe z.
2. Étudiez la fonction f et dressez son tableau de variation.
3. Étudiez la fonction qui à α associe l'altitude maximale de l'objet pour v_0 considéré comme fixe. Comment choisir α pour que l'objet atteigne la hauteur la plus grande possible ? Quel est l'inconvénient de cette méthode de tir ?
4. À v_0 fixé, comment choisir α pour tirer le plus loin possible ? Quelle est alors la hauteur maximale atteinte par l'objet ?
5. On suppose que $v_0 = 20m\cdot s^{-1}$. On souhaite que l'objet retombe sur le sol 20 mètres plus loin. Quel angle de tir doit-on choisir ?

Exercice IV - 30 Théorème de Rolle

Ce théorème affirme que

Théorème IV - 6 :
Théorème de Rolle
Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a)=f(b)$ alors il existe un réel $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$

Nous nous proposons de démontrer ce théorème.

1. Faites un dessin résumant .... et démontrant la situation.

2. Comme f est continue sur $[a,b]$, l'image de $[a,b]$ est un intervalle d'après le TVI. Notons-le $[m,\mathrm{M}]$.
   a) Si $m=\mathrm{M}$, que peut-on en déduire ?
   b) Sinon, le maximum M par exemple est atteint pour un réel $e\in]a,b[$. Notons $\tau_e(x)=\dfrac{f(e+x)-f(e)}{x}$. Que pensez-vous de $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\tau_e(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\tau_e(x)$?
   c) Étudiez le signe de $f'(e)$ et concluez.

Exercice IV - 31 Théorème des acroissements finis

Voici l'énoncé

Définition IV - 4 :

þéorème des accroissements finis
Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ alors il existe au moins un réel $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

Pour prouver ce théorème, faites une figure. On appellera A le point d'abscisse a, B le point d'abscisse b, M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et P le point du segment [AB] d'abscisse x. On note enfin $\varphi(x)=\overline{\mathrm{PM}}=y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{P}}$

1. Exprimez $\varphi(x)$ en fonction de x.
2. Pourquoi peut-on appliquer le théorème de Rolle à φ sur $[a,b]$? Appliquez le et concluez.

Exercice IV - 32 Application du TAF

1. Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que $f'(x)=0$ pour tout $x\in[a,b]$. Démontrez que f est constante sur $[a,b]$.
2. Soit deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ tells que $f'(x)=g'(x)$ pour tout $x\in[a,b]$. Démontrez qu'il existe un réel constant C tel que $f(x)=g(x)+\mathrm{C}$ pour tout $x\in[a,b]$.

Exercice IV - 33 Tracer le graphe d'une fonction dont on connaît la dérivée

Une question surgit dans votre esprit en ébullition. On connaît des fonctions dont les dérivées sont :

- $x\mapsto x^2$
- $x\mapsto x^1$
- $x\mapsto x^0$
- $x\mapsto x^{-2}$
- $x\mapsto x^{-3}$

mais on ne connaît pas de fonction dont la dérivée est $x\mapsto \frac{1}{x}$. En existe-t-il une ?
Pour le savoir, nous allons utiliser notre fameuse approximation affine [f]

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

pour h « suffisamment petit »
Nous en déduisons que $f(x+h)\approx h\times f'(x)+f(x)$.
Commentez alors le programme suivant

```
der2fonc(d,a,b,yo,h):={
   x:=a;
   y:=yo;
   P:=point(x,y);
pour j de a jusque b pas h faire
     y:=h*d(x)+y; x:=x+h; P:=P,point(x,y);
fpour;
couleur(P,rouge);
}:;
```

f. Voir théorème 3 page 7

Observons maintenant le graphe de la fonction f qui a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[0,1\,;\,15]$ avec $f(0,1) = -2,3$ et un pas de 0,05 :

```
der2fonc(x->1/x,0.1,15,-2.3,0.05)
```

Cette fonction semble donc exister ! Nous l'étudierons bientôt : c'est la fonction LOGARITHME NÉPÉRIEN.

Exercice IV - 34 Que fait ce programme ?

```
  gericault(f,a,p):={
d:=0;
h:=0.1;
tantque abs(D-d)>p faire
      D:=d;
      d:=(f(a+h)-f(a))/(h);
      h:=h/2;
ftantque;
return(d)
}:;
```

Exercice IV - 35 Taylor et les approximations polynomiales

A - Conventions

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.
Nous dirons qu'une fonction est deux fois dérivable sur I si sa dérivée est elle-même dérivable sur I.
Nous noterons $f^{(1)}$ la dérivée d'une fonction f dérivable sur I, $f^{(2)}$ la dérivée de $f^{(1)}$ et plus généralement $f^{(n)}$ la dérivée de $f^{(n-1)}$.
Par convention, $f^{(0)}$ désignera f.
Nous dirons qu'une fonction est n fois dérivable sur I si sa dérivée $n-1$-eme est elle-même dérivable sur I.

Soit n un entier naturel. On désigne par $n!$ le nombre :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

Par exemple, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.
Par convention, $0! = 1$.

Soit f une fonction n fois dérivable sur I. Soit a un élément de I. Pour tout réel x, on définira le *polynôme de* Taylor *en a à l'ordre n* par la relation :

$$\mathrm{T}_{n,a}(f)(x) = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

B - Cas de l'ordre 1

Soit f une fonction dérivable sur I.
Simplifiez l'écriture de $\mathrm{T}_{1,a}(f)(x)$. Ça vous dit quelque chose ?
Sur un même graphique, donnez l'allure des courbes représentatives de f et de $\mathrm{T}_{1,-\frac{1}{2}}(f)$ avec $f\ :\ x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2$ en vous aidant de la calculatrice ou d'un ordinateur.

C - Cas des fonctions polynomiales

Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{P}(x) = 7x^4 - 3x^2 + 5x - 12$.
Calculez P(2).
Donnez le développement de Taylor en 2 à l'ordre 3 de P puis à l'ordre 57.

D - Cas des fonctions homographiques

Une fonction homographique est une fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec a, b, c et d des réels.
Notons g la fonction homographique correspondant au cas $a=0$, $b=d=1$ et $c=-1$.
Quel est l'ensemble de définition de g ?
Calculez $g^{(1)}(x)$, $g^{(2)}(x)$, $g^{(3)}(x$ et plus généralement $g^{(n)}(x)$.
Écrivez le plus simplement possible $\mathrm{T}_{5,0}(g)(x)$.
Sur un même graphique, donnez l'allure des courbes représentatives de g et de $\mathrm{T}_{5,0}(g)$ en vous aidant de la calculatrice ou d'un ordinateur.

Soit $h(x)=\dfrac{5-3x}{1-x}$. Montrez qu'il existe deux réels α et β tels que $h(x)=\alpha+\dfrac{\beta}{1-x}$.
Déduisez-en $\mathrm{T}_{5,0}(h)(x)$ pour x appartenant à un bon intervalle.

E - Cas des fonctions trigonométriques

Soit $f(x)=\sin(x)$.
Calculez $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x$, $f^{(4)}(x$ et plus généralement $f^{(n)}(x)$.
Écrivez le plus simplement possible $\mathrm{T}_{5,0}(f)(x)$.
Sur un même graphique, donnez l'allure des courbes représentatives de f et de $\mathrm{T}_{5,0}(f)$ en vous aidant de la calculatrice ou d'un ordinateur.

Faites de même avec $g(x)=\cos(x)$.

On pose $h(x)=\tan(x)$. Déterminez $\mathrm{T}_{4,0}(h)(x)$.

F - Cas des fonctions irrationnelles

On pose $\varphi(x)=\sqrt{1+x}$
Répondez aux questions habituelles.

G - Approximation locale ou globale ?

En utilisant les termes « global » et « local », comment classeriez-vous les fonctions étudiées précédemment et leurs approximations polynomiales ?