Tale STL2 Équations différentielles

.

1- Petit résumé de cours : résolution de l'équation différentielle $y' = ay$

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Elle fait intervenir la fonction-inconnue notée y, ses dérivées successives notées y', y'', $\cdots$ et des fonctions connues.

Il s'agit donc ici de déterminer *toutes* les fonctions f dérivables sur I telles que, pour tout x de I

$$f'(x) = af(x)$$

- ▷ Supposons qu'il existe une solution y et posons $z(x) = e^{-ax}y(x)$. Calculez $z'(x)$. Qu'en déduisez-vous sur z ? sur y ?.
- ▷ La démonstration précédente suppose qu'il existe une solution au problème. Est-on sûr qu'une telle solution existe (dans le cas contraire, nous serions bien embêtés car notre démonstration ne vaudrait plus rien) ?

  Pouvez-vous trouver une solution particulière au problème ?

Théorème 1
Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a un réel donné) sont les fonctions

$$x \longmapsto \lambda e^{ax}$$

où λ est une constante arbitraire.

Vous aurez donc remarqué qu'il existe une infinité de fonctions vérifiant cette équation différentielle si on ne donne pas d'autre précision.

Exemples

1. Résolvez par exemple l'équation $(\mathrm{E}_1) : 3y' + 2y = 0$ et tracez plusieurs solutions sur l'écran de votre calculette.
2. Résolvez cette même équation sachant maintenant que $y(0) = 32$.

Donnez également une solution (non identiquement nulle...) pour chacune des équations différentielles suivantes :

$$(\mathrm{E}_2) : y' = 32y \qquad (\mathrm{E}_3) : y' = -32y \qquad (\mathrm{E}_4) : y' = 32$$

V **F** Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $4f' - 3f = 0$ et $f(0) = 1$.

1. La courbe représentative de f passe par le point A de coordonnées $(1, 3/4)$.
2. La courbe représentative de f a, au point d'abscisse 0, une tangente de coefficient directeur 1.
3. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2- Exercices de Bac

Exercice 1

Partie A Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $y' = 0,12y$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation différentielle.
2. Déterminer la fonction f solution de cette équation différentielle prenant la valeur 3,5 pour la valeur 0 de la variable.

Partie B Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie pour tout t appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = 3,5\mathrm{e}^{0,12t}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ (unité 1 cm sur chaque axe).

1. Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
2. Soit f' la fonction dérivée de f.
   a) Calculer $f'(t)$ pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$
   b) Étudier le signe de $f'(t)$.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 0.
4. Reproduire et compléter le tableau suivant. On donnera les résultats à 10^{-2} près.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(t)$											

5. Construire la tangente (T) et la courbe $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

Partie C Application

Dans un milieu biologique donné, on appelle N le nombre de cellules d'une population en développement. N varie en fonction du temps t selon la relation $\mathrm{N} = f(t) = 3,5\mathrm{e}^{0,12t}$, où N est exprimé en millions de cellules et t en heures.

1. Calculer l'instant t (arrondi au centième) où le milieu donné contiendra une population de 6 millions de cellules.
2. Retrouver ce résultat graphiquement. On fera apparaître les traits de construction sur le dessin.

Exercice 2

Après la prise d'une boisson alcoolisée par une personne, on procède à l'étude de l'évolution de la quantité d'alcool présente dans son tube digestif (*exercice* I) *puis dans les liquides du corps* (*exercice* II). *Ces deux exercices peuvent être traités indépendamment l'un de l'autre.*

EXERCICE I **5 points**

À l'instant t, on note $u(t)$ la quantité d'alcool encore présente dans le tube digestif avec t exprimé en minutes et $u(t)$ en moles d'alcool. On a relevé les résultats suivants :

t_i (en min)	0	1,5	4,5	9	15	18
$u_i = u(t_i)$ (en mole)	1,2	0,94	0,56	0,26	0,10	0,06

On pose $v_i = \ln(u_i)$.

1. Recopier et compléter, avec des valeurs arrondies à 10^{-2} près, le tableau suivant :

t_i	0	1,5	4,5	9	15	18
v_i						

2. Représenter le nuage de points $\mathrm{M}_i(t_i\ ;\ v_i)$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées). Que remarque-t-on ?

3. On désigne par G_1 le point moyen des trois premiers points du nuage et par G_2 celui des trois derniers.

a) Calculer les coordonnées de G_1 et de G_2 et tracer la droite $(\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2)$ sur le graphique.

b) Déterminer une équation de la droite $(\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2)$ sous la forme $v = mt + p$.

On admet que cette droite constitue un bon ajustement du nuage de points M_i.

4. À partir de cet ajustement, déterminer la quantité d'alcool encore présente dans le tube digestif de cette personne à l'instant $t = 20$.

5. On admet désormais que la fonction u est dérivable et vérifie l'équation différentielle :

$$u' = -0,17u \qquad \text{avec} \quad u(0) = 1,2.$$

a) Résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ cette équation différentielle.

b) Calculer $u(20)$ et comparer avec le résultat obtenu expérimentalement à la question **4.** précédente.

EXERCICE II **10 points**

Après absorption, l'alcool se répartit dans les liquides du corps, en particulier dans le sang, où il est dégradé et évacué.

À l'instant t, on note $q(t)$ la quantité d'alcool encore présente dans les liquides du corps avec t exprimé en minutes et $q(t)$ en moles d'alcool.

On admet que sur l'intervalle $[0\,;\,400]$, l'expression de $q(t)$ en fonction de t est :

$$q(t) = 1,2 - 2,9.10^{-3}\,t - 1,2\mathrm{e}^{-0,17t}.$$

1. Vérifier que $q(0) = 0$.

2. a) Montrer que la fonction q' dérivée de q vérifie

$$q'(t) = 0,204\mathrm{e}^{-0,17t} - 2,9.10^{-3}.$$

b) Montrer que l'équation $q'(t) = 0$ admet une unique solution t_0 . Calculer une valeur approchée, au centième près, de t_0 et de $q(t_0)$.

c) Résoudre sur l'intervalle $[0\,;\,400]$ l'inéquation $q'(t) \geqslant t_0$. En déduire les variations de la fonction q sur cet intervalle et dresser son tableau de variations.

3. Tracer, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction q (unités graphiques 1 cm pour 20 minutes sur l'axe des abscisses et 10 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées).

4. Déterminer graphiquement l'instant t, à partir duquel la quantité d'alcool redevient inférieure à 0,44 mole (cette quantité correspond pour cette personne à un taux d'alcoolémie de 0,5 g d'alcool par litre).

Exercice 3

L'iode 131 est un produit radioactif. Tout échantillon d'iode 131 a sa masse qui diminue régulièrement par désintégration.

1. Dans un premier livre de physique, on lit que la masse de tout échantillon d'iode 131 diminue de 8,3 % chaque jour.
On dispose d'un échantillon de masse initiale $M_0 = 100$ g.

a) Calculer, arrondie au dixième, la masse M_1 de l'échantillon au bout d'une journée puis sa masse M_2 au bout de deux jours.

b) On note M_n la masse de l'échantillon au bout de n jours. Démontrer que la suite (M_n) est une suite géométrique.

c) Calculer la masse M_{10} de l'échantillon au bout de 10 jours, arrondie au dixième.

2. Dans un second livre de physique, on lit que la masse de tout échantillon d'iode 131 est une fonction du temps, $M : t \longmapsto M(t)$ qui est solution de l'équation différentielle :

$$M'(t) = \lambda \cdot M(t) \qquad \text{(E)}$$

où t est le temps exprimé en jours et λ une constante réelle.

a) Résoudre l'équation (E).

b) Sachant que lorsque $t = 0$, la masse de l'échantillon est de 100 g, exprimer $M(t)$ en fonction de t et de λ.

c) Calculer $M(1)$ en fonction de λ. Pour quelle valeur de λ a-t-on $M(l) = 91,7$?
On donnera une valeur approchée de λ arrondie au dix-millième.

Exercice 4

Au cours d'une réaction chimique, on appelle $C(t)$ la concentration du réactif (en moles par litre) à l'instant t (en minutes). On admet que la fonction $C : t \mapsto C(t)$ définie sur l'intervalle $I = [0\,;\,+\infty[$ est solution de l'équation différentielle (E) :

$$C'(t) = -aC(t).$$

où a est une constante donnée liée à la réaction.

1. a) Résoudre l'équation (E).

b) Déterminer la solution de (E) vérifiant : $C(0) = 0,1$ mol.L^{-1} ($C(0)$ est la concentration initiale à l'instant $t = 0$).

2. On donne $a = 9,9 \times 10^{-3}$ min'$^{-1}$ et on suppose désormais que la fonction C est définie sur par :

$$C(t) = 0,1 \times e^{-9,9\times 10^{-1} t}.$$

a) Déterminer le temps de demi-réaction noté $t_{1/2}$, c'est à dire la valeur de t pour laquelle la concentration est égale à la moitié de la concentration initiale $C(0)$. On donnera d'abord la valeur exacte de t puis celle arrondie à la minute.

b) La courbe représentative de la fonction C est donnée en annexe. L'axe des abscisses est graduée en minutes. Déterminer graphiquement la valeur de t pour laquelle la concentration est égale à 10 % de la concentration initiale.

Courbe représentative de la fonction C