Chapitre 1

Limites

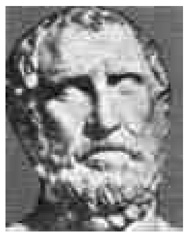
I - Vers l'infini et au-delà : un brin de philosophie

a. Prenons le temps d'y penser

Weierstraß
1815 - 1897

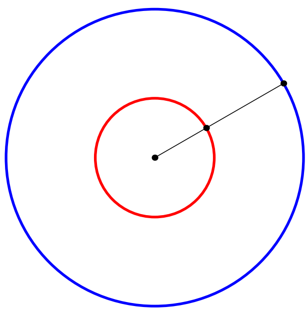
La notion d'infini a turlupiné les plus grands esprits pendant des siècles. De rudes batailles philosophico-mathématiques ont été menées de l'Antiquité à nos jours.
Même si la conception de limite est encore en évolution, celle que vous avez découverte en classe de Première a vu le jour en 1850 grâce au charmant WEIERSTRASS et avait échappé à GALILÉE, DESCARTES, PASCAL, LEIBNIZ, NEWTON, etc. bref : du beau monde...et on vous demande d'assimiler cette notion en quelques semaines !
L'humanité ayant pris son temps pour l'acquérir, n'hésitez pas vous non plus à réfléchir calmement à ce à quoi peut ressembler un « infiniment grand » et un « infiniment petit ».
Cela vous permettra peut-être d'éviter d'écrire, comme tant d'autres lycéens, de grosses bêtises sur vos copies au moment de calculer des limites.

b. De l'Antiquité au Moyen-Âge



Zénon
490-425 av. JC

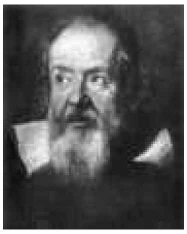
Nous sommes coincés entre deux notions : celle d'infiniment grand et celle d'infiniment petit. C'est la deuxième qui a commencé par poser le plus de problèmes. Au V$^{\text{ème}}$ siécle avant JC, Zénon proposa quatre paradoxes[a], dont le plus célèbre est celui d'Achille et de la Tortue. Achille courre beaucoup plus vite que la tortue mais part 10 mètres derrière elle. Le temps qu'Achille franchisse ces 10 mètres, la tortue aura parcourue une certaine distance d, le temps qu'Achille franchisse cette distance d, la tortue aura parcourue une certaine distance d', etc., donc Achille mettra un temps infini à franchir ces distances de plus en plus petites mais en nombre infini !
Archimède et avant lui Démocrite réussirent à calculer les volumes de solides an « empilant » des « lamelles » planes d'épaisseurs infiniment petites. C'est ainsi qu'Archimède montra que le volume de la sphère valait $\frac{4}{3}\pi R^3$.
Concernant les rapport entre les infinis, les questions se posèrent dès le Moyen-Âge où la figure suivante permit d'affirmer qu'il y avit autant de point sur le petit cercle que sur le grand[b]



Ainsi, deux infiniment grands différents semblent en fait avoir le même nombre -infini- d'éléments...

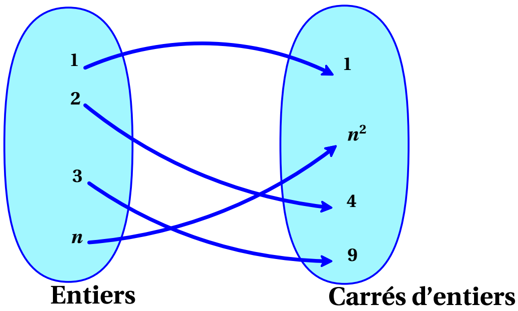
[a] Nous les étudierons lors du chapitre sur les suites
[b] Les démonstrations géométriques ont longtemps été les seules démonstrations admises en mathématiques depuis les Grecs.

c. Du XVI$^{\text{ème}}$ au XVII$^{\text{ème}}$ siècle



Galilée
1564 - 1642

Entre deux découvertes, GALILÉE remarqua qu'à chaque entier naturel, on pouvait associer son carré et réciproquement qu'à chaque carré on pouvait faire correspondre sa racine carrée.



Il y avait donc autant d'entiers naturels que de carrés parfaits, ce qui en laissa plus d'un rêveur... Le grand Leibniz lui-même refusa de *croire* que des infinis qui paraissaient de toute évidence de tailles différentes soient en fait de même taille.

Blaise Pascal
1623 - 1662

Mais la plus grande des batailles se joua au sujet des infiniment petits, que CAVALIERI(1598 - 1647) nomma pour la première fois *indivisibles*.
PASCAL en fit de larges commentaires. Il remarqua en effet que tout esprit admet facilement qu'une quantité puisse être augmentée à l'infini en la doublant et en réitérant le mécanisme par exemple.
En revanche il est *psychologiquement* beaucoup plus ardu d'imaginer un « infini de petitesse ».
Prenons un segment de droite et divisons-le en 2, puis encore en 2, etc. Si on admet une fin de la division nous dit Pascal, on admet l'existance d'indivisibles. Si ces indivisibles ont une étendue, il sont encore divisibles, ce qui est absurde. Mais s'ils n'ont pas d'étendue, on ne peut pas les « recoller » pour reformer la division dont ils sont issus...
Donc, Pascal arrive *indirectement* à la conclusion qu'on ne peut pas arrêter la division et qu'elle peut se répéter infiniment.
La difficulté d'appréhension vient du fait qu'on n'accède pas directement à la preuve de l'existence d'infiniment petits, mais indirectement en prouvant qu'il est impossible qu'ils n'existent pas !...
Reste à déterminer la nature de cet infiniment petit. D'une part on le considère comme négligeable devant des grandeurs *mesurables*, tout comme le point est négligeable devant la droite.
Mais il ne faut pas trop le négliger sous peine de ne pouvoir reconstituer en l'additionnant une quantité mesurable comme l'ont théorisé Leibniz et Newton avec le calcul différentiel comme nous le verrons en étudiant les dérivées et les intégrales.
Ils ont en effet eu besoin d'addditionner des infiniment petits, mais ont remarqué des résultats troublant.
Par exemple, EULER(1707 - 1783) a montré que

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

mais que

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\longrightarrow+\infty$$

même si dans chacun des cas on ajoute des infiniment petits.
De plus, on peut se demander que vaut

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

D'une part, $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0$, et d'autre part $1-(1-1)-(1-1)-\cdots=1$, et donc...$0=1$!
Bref, y a quelque chose qui cloche là-dedans, ce qui fit dire à l'Irlandais BERKELEY *ne vaut-il pas mieux donner de bonnes approximations que prétendre atteindre à l'exactitude par des sophismes ?* et donc étudier des polygones plutôt que des courbes par exemple.
Sauf qu'il faudrait alors réfuter le calcul différentiel et renoncer quasiment à tout ce qui s'est découvert en sciences depuis le XVII$^{\text{ème}}$ siècle !

d. Le XIX$^{\text{ème}}$ siècle...enfin !

GAUSS(1777 - 1855), l'un des plus grands génies de l'Histoire n'a pas encore une vision correcte de l'infini, mais résume en fait la vision générale des limites que vous devez acquérir au Lycée : *L'infini ne doit être qu'une façon de parler pour exprimer que certaines quantités peuvent s'approcher aussi près que l'on veut d'une limite ou augmenter au delà de toute limite.*

Le grand bond de la pensée vient d'être effectué : cet infiniment petit qu'on recherchait avec tant d'ardeur depuis des siècles, cet ultime stade hypothétique, on le cherchait au mauvais endroit : on le cherchait constant alors qu'il faut le considérer comme *variable* : c'est ce que traduit le *aussi petit que l'on veut* dont parle Gauss et que va reprendre CAUCHY dans ses *Leçons sur le calcul infinitésimal* qui marque le réel envol de l'Analyse moderne. Notre austère royaliste posa en effet *Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.*

Augustin Louis Cauchy 1789 - 1857

C'est la définition utilisée en Terminale. Il existe cependant une faille dans cette définition mais qui est sans importance à notre niveau.
Il faudra attendre 1861 et Weierstraß pour obtenir une définition rigoureuse et surtout CANTOR pour explorer les réels et l'infini.

Georg Cantor 1845 - 1918

Cantor mit au point la *Théorie des Ensembles* et prouva ainsi des résultats qui défient la perception que l'on a du monde réel.
Il donna un nom au *cardinal* (c'est-à-dire au nombre d'éléments) de $\mathbb{N}$: $\aleph_0$ (qui se lit aleph zéro). Il montra qu'il s'agit du plus petit cardinal d'un ensemble infini. Comme l'avait déjà pressenti Galilée, il montra qu'il y a autant d'entiers pairs que d'entiers tout court, et donc que $2 \times \aleph_0 = \aleph_0$. Il montra ensuite qu'il y avait autant de nombres rationnels que d'entiers. Or un entier peut être représenté par un couple (numérateur,dénominateur). Il y a donc $\aleph_0 \times \aleph_0$ tels nombres et donc $\aleph_0^2 = \aleph_0$... On parle alors d'ensembles *dénombrables*, c'est-à-dire d'ensembles dont tous les éléments peuvent être reliés d'une et une seule manière à un entier naturel[c]
Est-ce pareil pour $\mathbb{R}$? Cantor montra en fait que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : on ne peut pas mettre un dossard sur chacun des nombre réels. Plus fort encore : il montra qu'il y a autant de nombres dans $[0;1]$ que dans $\mathbb{R}$ tout entier. Et le summum : il y a autant de nombres dans $[0;1]$ que dans l'Espace de dimension 3 tout entier !
Ce résultat rendit à moitié fou le pauvre russo-germano-danois qui affirma en parlant de ces résultats : « je le vois mais je n'y crois pas »...
Lorsqu'on vous a présenté les réels en 2$^{\text{nde}}$, on vous a parlé des entiers naturels, des entiers relatifs, des décimaux, des rationnels, des irrationnels. On a cependant besoin de parler d'une autre catégorie de nombres : *les nombres algébriques* qui sont les réels solutions d'une équation polynomiale à coefficients rationnels...
Par exemple, $\sqrt{2}$ est algébrique car il est solution de $x^2 - 2 = 0$. De même, $\frac{3}{2}$ est algébrique car solution de $2x - 3 = 0$.
Les nombres qui ne sont pas algébriques sont dits *transcendants*.
Cantor montra que cet ensemble est aussi dénombrable, et donc que les nombres transcendants ne sont pas dénombrables, c'est-à-dire qu'il y en a beaucoup plus...or vous ne connaissez qu'un seul de ces nombres : π ! Et on en connaît en fait très peu : il a fallu de grosses recherches à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ pour prouver que π était transcendant. C'est assez troublant de penser qu'on ne connaît pas la plupart des nombres réels !...

e. Oui...et alors ?

Votre cerveau fume ?...Bien ! Que retenir de ce passionnant exposé ? Et bien au moins que *calcul sur les limites = danger*. Les infiniment grands et les infiniment petits doivent se traiter avec la plus grande prudence et qu'il a fallu des siècles à l'humanité pour les apprivoiser. Quant à vous, je vous laisse deux semaines...
Il est maintenant temps de s'amuser un peu.

II - Qu'est-ce qu'une fonction ?

Mathémator : Question idiote n'est-ce pas ?
Téhessin[d] : Ben c'est une formule comme par exemple $f(x) = (x+1)^2$

Mathémator : C'est tout ? Je vois...L'année de formation qui nous attend ne sera pas superflue. Si vous avez éprouvé des difficultés l'an passé, c'est peut-être que vous n'avez pas fait l'effort d'avoir en tête une définition claire, précise, rigoureuse. Peut-être n'avez-vous pas compris comment cette définition pouvait être liée aux diverses propriétés, à quoi tout le tralala pouvait servir, comment cette partie du programme pouvait être reliée à d'autres notions déjà étudiées. Vous ne semblez pas avoir une vision intuitive de la notion susceptible de vous aider à comprendre comment tout s'imbrique si merveilleusement dans notre magnifique univers mathématique à l'esthétique si parfaite. Pourquoi cette notion est-elle apparue ? Quelle est sa place dans l'histoire de l'esprit humain ? Quelles sont ses applications concrètes ? C'est avec ces questions en tête que nous essaierons d'aborder toutes les notions qu'un(e) jeune Mataïe se doit de maîtriser à l'issue de sa formation terminale.

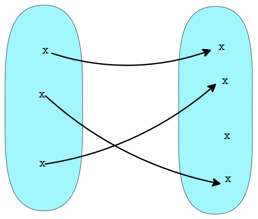
Téhessin (à part) : *À ce rythme là, dans deux ans on y est encore, et moi j'ai d'autres projets.*

[c] en gros, on peut accoler un dossard différent à tous...
[d] Si notre héros est un garçon, c'est pour faciliter les accords des adjectifs et participe passé.

Mathémator : Vous dîtes ?

Téhessin : J'ai hâte d'étancher ma soif de connaissance, ô céleste maître.

Mathémator : À la bonne heure ! Disons qu'une fonction associe à TOUT élément d'un ensemble de départ un UNIQUE élément d'un ensemble d'arrivée. Cela correspond typiquement au diagramme en patates suivant



Nous nous restreindrons aux fonctions dont les ensembles de départ et d'arrivée sont des parties de $\mathbb{R}$.

Téhessin : Parce qu'il en existe d'autres ?

Mathémator : Nous verrons cette année quelques exemples de fonctions à valeurs complexes, de fonctions vectorielles, de fonctions de plusieurs variables, sans toutefois rentrer dans le détail, mais sachez au moins qu'elles existent.

Téhessin : Donc ce que j'ai appelé *fonction* depuis le collège n'est qu'un cas particulier de fonction.

Mathémator : Oui mais, jusqu'à nouvel ordre, par abus de langage, *fonction* sous-entendra pour nous *fonction d'une variable réelle à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

Il reste un problème à résoudre pour notre confort intellectuel : nous travaillons avec des nombres réels, mais qu'est-ce que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ?

Téhessin : Ben c'est tous les nombres qui existent.

Mathémator : C'est faux et beaucoup trop vague ! Faux car nous allons rencontrer cette année de nouveaux nombres qui ne seront pas des réels (les complexes) et vague car cela ne nous permet pas d'avoir des propriétés sur $\mathbb{R}$ exploitables.
Malheureusement, la construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ est hors de notre portée pour le moment.

III - Pourquoi est-il important de préciser sur quel ensemble on travaille ?

Mathémator : Posez votre stylo sur votre table et observez-le : il a l'air solide et immobile. Maintenant, imaginez que vous observez ce même stylo, mais avec une loupe assez puissante pour voir ce qui s'y passe au niveau atomique : votre stylo vous apparait alors plein de vide, avec des électrons qui tournent dans tous les sens. C'est pourtant le même stylo. Mais une propriété locale - un atome est pratiquement vide de matière - n'est pas « exportable » au niveau global - le stylo nous apparaît solide, sans la moindre trace de vide.
Pour l'étude d'une fonction, il faudra prendre le même type de précautions, à savoir distinguer un problème local d'un problème global.

Téhessin : Je comprends votre exemple physique, mais je ne vois pas bien ce que ça peut donner en mathématique.

Mathémator : Il faut commencer par acquérir une bonne vision de cet ensemble $\mathbb{R}$, à la fois connu et mystérieux. Pour cela fermez les yeux.

Téhessin (à part) : *C'est le gourou d'une secte ou un prof de maths ?! Je vais quand même garder un œil ouvert au cas où.*

Mathémator : Vous voyez la droite des réels ?

Téhessin (à part) : *Avec des éléphants roses courrant dessus* **tout haut :** je ne vois qu'elle.

Mathémator : Bien, alors repérez le nombre 32 et zoomez dessus, disons en vous plaçant dans l'intervalle $[31,33]$. Puis rezoomez, cette fois-ci en vous plaçant dans l'intervalle $[31,9 ; 32,1]$: vous êtes plus proche de 32. Mettez-vous maintenant dans la peau de $32-10^{-32}$.

Téhessin (à part) : *Ça devient grave, il a peut-être besoin d'une piqure...*

Mathémator : Pour lui, 31,9 est à l'autre bout du monde et il se sent très proche de 32. Mettez-vous alors à la place de $32-10^{-10^{10^{10}}}$: vous vous sentez voisin de 32 et pour vous $32-10^{-32}$ est sur une autre planète.

Téhessin : Je commence à voir, les yeux fermés, où vous voulez en venir : on aura beau chercher, on ne trouvera pas de nombre réel plus proche de 32 que tous les autres.

Mathémator : La notion de « proximité » devient alors toute relative. Il faudra garder ces schémas en tête quand nous travaillerons dans $\mathbb{R}$.

Revenons à présent à notre distingo local - global. Nous serons souvent amenés à parler d'une assertion vraie ou fausse « au voisinage » d'un point. Par exemple, pensez-vous que $x^2 \leqslant 1$ au voisinage de 0 ?

Téhessin : En fait, c'est faux pour $x = 2$, par exemple, mais ça devient vrai si x est compris entre -1 et 1, donc « localement », autour de 0, c'est vrai.

Mathémator : On peut dire en fait que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0-1, 0+1]$, l'assertion est vraie. Nous verrons que ce résultat nous permettra de dire que l'assertion est vraie au voisinage de 0.

Maintenant, pensez-vous que $1/x^2 \geqslant 16$ au voisinage de 0 ?

Téhessin : Je vous arrête tout de suite : l'assertion est fausse car elle n'est même pas vraie en 0 puisque $1/x^2$ n'est pas défini en 0.

Mathémator : Cela aurait pu être un argument, mais cela se serait avéré très réducteur, car nous serons amenés à étudier des propriétés au voisinage de points où la fonction n'est pas définie, notamment au moment de l'étude des limites. Ici, nous pouvons dire que l'assertion est vraie pour tout x appartenant à $[0-4, 0+4]$ ET à l'ensemble de définition $\mathbb{R}^*$.
On peut utiliser le symbole $\cap$ de l'intersection pour noter l'ensemble $[0-4, 0+4] \cap \mathbb{R}^*$, ce qui peut encore s'écrire sous la forme $[-4, 0[\cup]0, 4]$. Ainsi, n'oubliez pas de considérer l'intersection de l'intervalle englobant le point avec l'ensemble de définition

Encore un petit exemple : croyez-vous que x^3 soit positif au voisinage de 0 ?

Téhessin : En fait, x et x^3 ont le même signe, donc il suffit de dire que pour $x = 10^{-32}$ par exemple, l'assertion est fausse.

Mathémator : Mouais, le problème, c'est qu'un contre-exemple ne suffit pas : qui nous dit que x^3 ne devient pas positif pour des valeurs de x plus petite ? Il faut donc donner une démonstration et pas seulement un cas particulier. Ce sera l'occasion de découvrir un *raisonnement par l'absurde* qui nous rendra service tout au long de l'année.

Supposons donc que l'assertion soit vraie *(on suppose ce qui nous semble absurde...)*
Cela est équivalent à dire qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que x^3 soit positif pour tout $x \in [0-\varepsilon, 0+\varepsilon]$
Ainsi, par exemple, $(-\varepsilon)^3$ est positif, or $(-\varepsilon)^3 < 0$ comme $-\varepsilon$, on arrive donc à une *contradiction.*
Il y a donc quelque chose qui cloche dans notre raisonnement et ça ne peut être que le point de départ car nous sommes sûrs du reste, donc l'assertion est fausse.

Retenez donc bien qu'il faut que le point critique appartienne à l'intervalle.
Nous pouvons donc proposer l'assertion suivante :

Définition 1.1
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ et x_0 un réel. Une assertion est vraie **au voisinage** de x_0 s'il existe un intervalle I contenant x_0 tel que l'assertion soit vraie pour tout x de $\mathrm{I} \cap \mathscr{D}$

Nous serons également amenés à étudier des assertions au voisinage de l'infini.

Téhessin : Ça me parait un peu difficile à atteindre.

Mathémator : Mais ce n'est pas impossible : nous allons un peu modifier notre définition. Par exemple, est-ce que la fonction inverse

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array}$$

est majorée sur son ensemble de définition ?

Téhessin : Je sens que c'est faux au voisinage de 0.

Mathémator : Je vous laisse le montrer. Modifions alors le problème : vous êtes d'accord que $f(x) \leqslant 1$ dès que $x \in [1, +\infty[$. On dira alors que f est majorée par 1 au voisinage de $+\infty$: on ne peut pas mettre l'infini dans notre intervalle, certes, mais on peut le placer à l'une de ses extrémités

Définition 1.2
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$. Une assertion est vraie **au voisinage** de $+\infty$ s'il existe un réel a tel que l'assertion soit vraie pour tous les x de $[a, +\infty[$

Téhessin : Toutes ces propriétés me semblent pourtant plus globales que locales : elles sont vraies sur de grands intervalles.

Mathémator : Je comprends ce que vous voulez dire : en fait, une propriété est locale dès qu'elle n'est pas vraie *partout*. Il y a ensuite des propriétés plus locales que d'autres, je vous l'accorde. Pour vous en rendre compte, nous allons (re)découvrir un concept vraiment très local, celui de limite. Retenez également, au point de vue méthodologique, qu'un raisonnement par l'absurde nous aide souvent à montrer qu'une assertion est fausse localement.

IV - Approche physique des différentes définitions

a. Limite finie en un réel

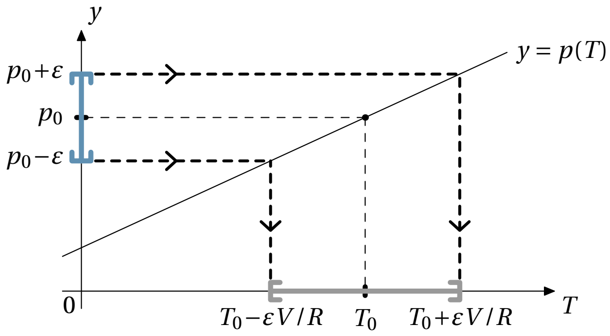
Vous connaissez peut-être la loi des gaz parfaits qui relie pression, volume et température d'une certaine masse de gaz dans certaines conditions

$$pV = Rt$$

avec R une constante qui dépend de la nature du gaz et des unités employées.
Si on considère un gaz parfait dans un récipient à volume constant, la pression va donc varier en fonction de la température que l'on peut contrôler selon l'équation

$$p(t) = \frac{R}{V}t$$

Soit $\varepsilon > 0$. Si l'on veut que la pression reste entre les valeurs $p_0 - \varepsilon$ et $p_0 + \varepsilon$, il suffit que l'on contrôle la température pour qu'elle se situe dans un certain intervalle qui dépendra de la précision ε choisie :



Si on utilise un formalisme mathématique, cela donne :

Définition 1.3 (Limite finie en un réel)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit f une fonction définie sur l'intervalle I vers $\mathbb{R}$, soit ℓ un réel et soit a un élément ou une extrémité finie de I. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel x appartenant à $I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$, on a $f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$, c'est à dire si tout voisinage de a contient TOUTES les valeurs de $f(x)$ prises pour tous les x proches de a

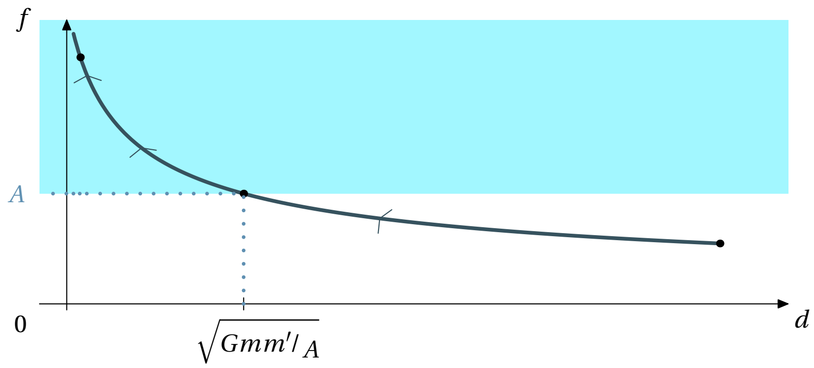
On rencontre parfois la notation équivalente $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

b. Limite infinie en un réel

Utilisons cette fois-ci la loi de Newton, donnant la force qu'exercent l'un sur l'autre deux points matériels de masses m et m' distants de d

$$f = G\frac{mm'}{d^2}$$

avec G la constante de l'attraction universelle.



Pour que f reste supérieure à une valeur arbitraire A, il suffit que les points matériels soient à une distance inférieure à $\sqrt{\dfrac{\mathrm{G}mm'}{\mathrm{A}}}$
Mathématiquement, la formulation est

Définition 1.4 (Limite infinie en un réel)
Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit f une fonction définie sur un intervalle I. Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout voisinage de $+\infty$ contient TOUTES les valeurs de $f(x)$ prises dans tous les voisinages de a.

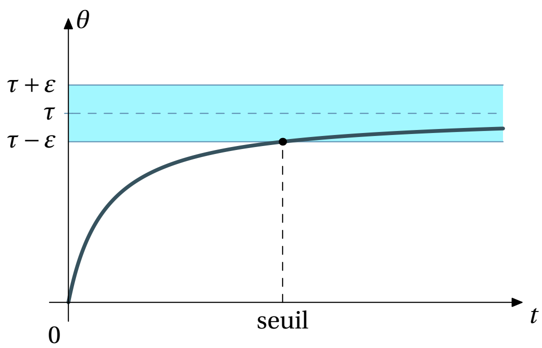
La formulation fait peur, mais j'espère que l'illustration physique est assez parlante. Ici, a a pour valeur 0 et $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

c. Limite finie en l'infini

Vous savez qu'au moment de démarrer votre 309 custom megabass, l'huile du moteur est froide puis la température d'huile augmente pour finir par se stabiliser autour de 90°C, que vous rouliez 30 minutes ou 32 heures (sauf incident).
On peut modéliser ce comportement en disant que la température θ de l'huile évolue en fonction du temps t selon la loi

$$\theta(t) = \tau\left(1 - \frac{1}{(t-1,1)^k}\right)$$

avec k une constante dépendant de la viscosité de l'huile et τ la température du régime stationnaire (90°C pour votre custom).



Ainsi, si l'on veut que la température θ reste comprise dans l'intervalle $]\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon[$, il suffit d'attendre suffisamment longtemps.
Cela donne en langage mathématique

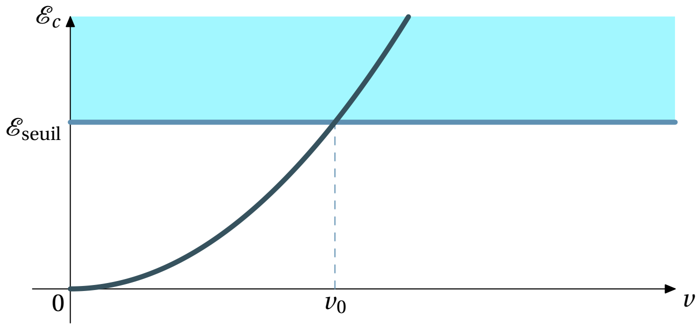
Définition 1.5 (Limite finie en l'infini)
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ lorsque, pour tout réel $\varepsilon > 0$, tout intervalle $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand

Je vous laisse bien sûr adapter cet énoncé au cas d'une limite en $-\infty$.

d. Limite infine en l'infini

Vous connaissez la formule donnant l'énergie cinétique d'un solide de masse se déplaçant à la vitesse v

$$\mathscr{E}_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2} m v^2$$



Si l'on veut que l'énergie cinétique reste supérieure à une certaine valeur quelconque strictement positive $\mathscr{E}_{\text{seuil}}$, il suffit que la vitesse reste supérieure à une certaine valeur v_0 qui dépendra du choix de $\mathscr{E}_{\text{seuil}}$.
Mathématiquement, cela donne

Définition 1.6 (Limite infinie en l'infini)
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend $+\infty$ lorsque, pour tout réel A strictement positif, l'intervalle $]\mathrm{A}, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand

V - Les théorèmes

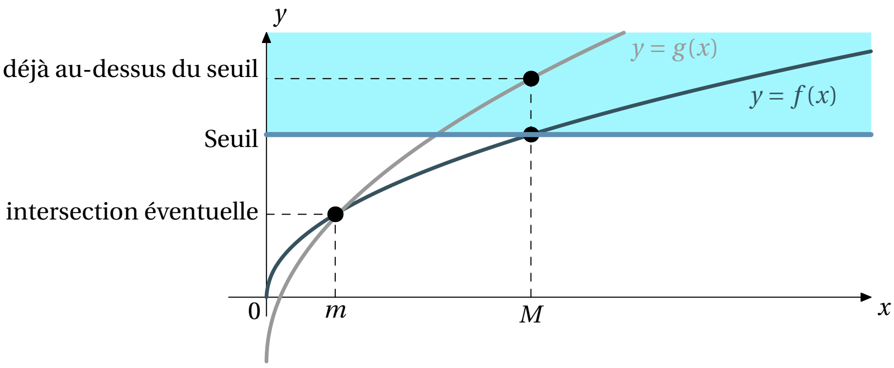
Téhessin : Je commence à m'habituer à ces définitions, mais serons-nous toujours obligés d'y revenir pour calculer des limites ?

Mathémator : Rassurez-vous, dans la plupart des cas, nous pourrons utiliser les théorèmes que vous avez en fait découvert l'an passé.
Mais avant toute chose, voici le principal théorème du cours

Théorème 1.1
En analyse, un dessin avant de résoudre l'exercice tu feras

a. Théorèmes de comparaison

Mathémator : Ce théorème est résumé par le dessin suivant



à savoir

Théorème 1.2
Si pour tout $x \geqslant m$ on a $g(x) \geqslant f(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

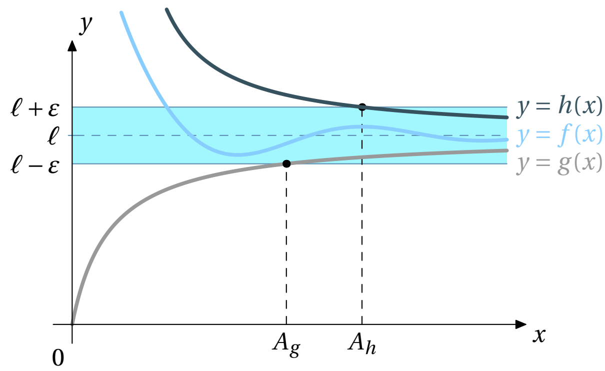
Téhessin : En fait, ça veut dire que si on est plus grand que quelque chose qui tend vers $+\infty$, on tend soi-même vers $+\infty$.

Mathémator : C'est cela, oui, et il existe le pendant en $-\infty$ que je vous laisse imaginer. Maintenant, le dessin est bien beau, mais il s'agirait de démontrer ce résultat. Or nous n'avons que la définition de la limite en magasin, donc utilisons-là.
On veut prouver que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, donc on considère un réel positif A quelconque.
Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, il existe un réel M tel que, pour tout $x \geqslant \mathrm{M}$, on a $f(x) \geqslant \mathrm{A}$
De plus, pour tout $x \geqslant m$, on a $g(x) \geqslant f(x)$
Donc, si on appelle μ le plus grand des réels m et M, pour tout $x \geqslant \mu$, on a $g(x) \geqslant \mathrm{A}$, ce qui exprime que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Par exemple $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $g(x) = \sqrt{x} + |\sin x| \geqslant \sqrt{x}$ pour tout réel x, donc par comparaison des limites on obtient que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

b. Théorèmes des gendarmes

Mathémator : Un nom qui fait un peut peur et qui laisse imaginer le pauvre prisonnier entouré de deux fiers à bras en uniforme. On aurait pu aussi l'appeler théorème des portes d'ascenseur, théorème de la mouche écrasée, théorème du rouleau compresseur, et j'en passe et des meilleures.
Comme d'habitude, l'idée vient du petit dessin suivant



Une fonction f est coincée entre deux fonctions g et h qui tendent vers ℓ en $+\infty$, alors f elle-même va tendre vers ℓ en $+\infty$. Il ne reste plus qu'à trouver un énocé et une démonstration.

Téhessin : Je veux bien donner l'énoncé

Théorème 1.3 (Théorème des gendarmes en l'infini)
Soient f, g et h des fonctions et ℓ et A deux réels.
Si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = \ell$ et que $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ pour tout $x \geqslant \mathrm{A}$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

Mathémator : La démonstration se déduit du dessin : on fixe un réel $\varepsilon > 0$ quelconque.
Comme $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$, il existe un réel A_g tel que, pour tout $x > \mathrm{A}_g$ on a $g(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$, i.e. $\ell-\varepsilon < g(x) < \ell+\varepsilon$
Comme $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \ell$, il existe un réel A_h tel que, pour tout $x > \mathrm{A}_h$ on a $h(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$, i.e. $\ell-\varepsilon < h(x) < \ell+\varepsilon$
Soit M le plus grand des réels A_g, A_h et A, alors on on a simultanément pour tout $x > \mathrm{M}$

$$\ell-\varepsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < \ell+\varepsilon$$

ce qui traduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On admettra en terminale que ce théorème s'applique aussi pour des limites en des valeurs finies (il suffirait pour le prouver de connaître les définitions des limites en des valeurs finies)

Théorème 1.4 (Théorème des gendarmes)
Soient f, g et h des fonctions, ℓ et A deux réels et ω un réel ou l'infini.
Si $\lim\limits_{x\to\omega} g(x) = \lim\limits_{x\to\omega} h(x) = \ell$ et que $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ pour tout $x \geqslant \mathrm{A}$, alors $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \ell$

Par exemple, nous pouvons maintenant étudier la limite de $f\ :\ x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ en $+\infty$.
En effet, vous savez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Pour $x > 0$, on obtient donc

$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

c. Opérations sur les limites

Mathémator : Il suffit d'ouvrir votre livre à la page 20 : toutes ces propriétés sont admises même si elles sont démontrables à l'aide des définitions.

d. Limites de fonctions composées

Mathémator : J'espère que vous êtes à l'aise dans la composition - décomposition de fonctions. Par exemple, pouvez-vous décomposer la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto \sqrt{-3x+1}$ en deux fonctions élémentaires ?

Téhessin : J'y arrive encore

$$x \xrightarrow{t\mapsto -3t+1} -3x+1 \xrightarrow{t\mapsto\sqrt{t}} \sqrt{-3x+1}$$

Mathémator : Bien. supposons maintenant que vous vouliez étudier la limite de φ en $-\infty$. Nous allons être amenés à décomposer le calcul de limite. Pour nous guider, nous aurons besoin de la propriété (admise) suivante :

Propriété 1.1
Soient ω, Ω et ℓ des réels ou l'infini et f et g deux fonctions, alors

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \Omega \\ \lim\limits_{\mathrm{T}\to\Omega} g(\mathrm{T}) = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to\omega} g\circ f(x) = \ell$$

Appliquez cette propriété au cas étudié.

Téhessin : Avec les couleurs, cela donne

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} -3x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{\mathrm{T}\to+\infty} \sqrt{\mathrm{T}} = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$$

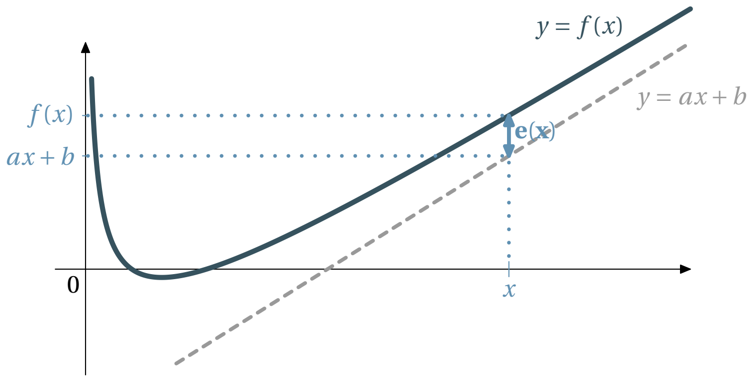
VI - Comportement asymptotique

a. Comment démontrer qu'une courbe admet une asymptote au voisinage de l'infini ?

Mathémator : Le mot asymptote évoque sûrement quelque chose pour vous.

Téhessin : C'est quand la courbe ressemble à une droite et il y a un rapport avec les limites, mais j'avoue avoir quelque peu oublié le reste.

Mathémator : Et bien reprenons depuis le début. Et pour commencer, bien sûr, un petit dessin.



Pour traduire numériquement le fait que la courbe vient « se coucher » sur la droite, il faudrait mettre en évidence que $e(x)$ devient de plus en plus petit à mesure que x augmente.

Téhessin : Ça sent la limite : il doit falloir dire que $\lim_{x\to+\infty} e(x) = 0$

Mathémator : Exactement. Or $e(x) = f(x) - (ax+b)$, donc

Théorème 1.5
La courbe d'équation $y = f(x)$ admet la droite d'équation $y = ax+b$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$$

On obtient un théorème similaire en $-\infty$.

b. Si $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$, alors $\mathscr{C}_f$ admet -elle forcément une asymptote au voisinage de $+\infty$?

Téhessin (à part) : *Je sens le piège* **(tout haut)** Non, bien sûr !

Mathémator : Alors, donnez-moi un contre-exemple.

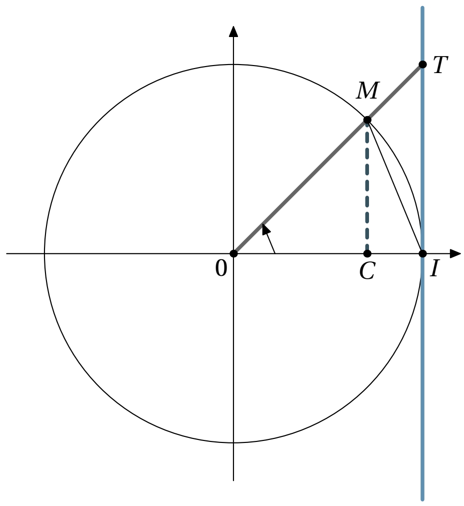
Téhessin : Si j'ai bien compris, la courbe doit « ressembler » à une droite au voisinage de l'infini, or une droite est la représentation graphique d'une fonction affine. Ainsi, pour que la courbe admette une asymptote en l'infini, il faut qu'elle soit la représentation d'une fonction du style

$$x \mapsto ax+b+e(x)$$

avec $e(x)$ qui tend vers 0 en l'infini, c'est à dire une partie affine plus une partie qui compte pour du beurre.

Mathémator : Votre esprit d'analyse m'impressionne, mais vous ne m'avez pas donné de contre-exemple.

Téhessin : Il suffit de prendre une partie non affine plus un bout négligeable. Disons $x \mapsto x^2 + 1/x$. Je rentre également la courbe d'équation $y = x^2$ et j'obtiens sur l'écran de ma calto :



Mathémator : Vous obtenez ce que vous appellerez peut-être un jour une branche parabolique. Mais il existe des comportements beaucoup plus irréguliers. Néanmoins vous avez bien compris que l'on peut reconnaître des termes dominants dans une expression. Attention, c'est un problème local. Dans votre exemple, x^2 est dominant en $+\infty$, mais au voisinage de zéro, c'est $1/x$ qui domine.

Téhessin (à part) : *Ça va, j'ai compris : global vs local. Il commence à radoter.*

Mathémator : Il ne vous reste plus qu'à vous entraîner sur une petite centaine d'exercices pendant ma pause méditation. Que la force soit avec vous !

c. Dominants et dominés

Téhessin : Votre intitulé fait un peu peur.

Mathémator : Évitons tout anthropomorphisme et contentons-nous de flotter dans l'éther mathématique.
Comme nous venons de le remarquer, il faudra cette année le plus souvent repérer à l'œil nu la limite en repérant les dominants et les dominés. Dans l'exemple précédant, $1/x$ était le terme dominant et x^2 le terme dominé au voisinage de 0, donc c'est $1/x$ qui « portera » la limite. Mais au voisinage de l'infini, les rôles s'échangent.
C'est parfois moins visible.
Prenez par exemple $3x^2 - 132x + 27$ au voisinage de $+\infty$. Nous sommes confrontés à une forme indéterminée $\infty - \infty$. Mais fermez les yeux et regardez les graphes des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$:vous voyez bien que x^2 est bien plus fort que x au voisinage de l'infini, et donc que c'est x^2 qui porte la limite qui sera donc $+\infty$.

Téhessin : Je pourrai écrire ça sur mes copies ?

Mathémator : Et non : ce n'est qu'un support à l'intuition, qui peut parfois être dangereuse comme nous le verrons dans les « vrai ou faux ». Pour le prouver par le calcul, on peut par exemple mettre le plus fort en facteur :
Pour tout $x \neq 0$, $3x^2 - 132x + 27 = x^2\left(3 - \dfrac{132}{x} + \dfrac{27}{x^2}\right)$
Or

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{132}{x}=0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{27}{x^2}=0\end{array}\right\}\overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{132}{x}+\frac{27}{x^2}\right)=3\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to+\infty}3x^2-132x+27=+\infty$$

VII - Croyable mais faux !

Mathémator combat les idées reçues sur les limites : une interview exclusive.

Téhessin : Est-il vrai qu'une fonction strictement croissante tend forcément vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : une fonction qui ne fait que croître va forcément monter vers $+\infty$. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver un *contre-exemple.*

Téhessin : Est-il vrai qu'une fonction qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ est forcément croissante pour x assez grand ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisqu'il faut aller vers l'infini et au-delà, il va bien falloir monter sans s'arrêter. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver un *contre-exemple.*

Téhessin : Est-il vrai qu'une fonction bornée tend forcément vers un réel en $+\infty$?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisque la fonction est bornée, elle ne pourra aller vers l'infini, donc il faut qu'elle se stabilise quelque part. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver un *contre-exemple.*

Téhessin : Est-il vrai qu'une fonction tendant vers M en $+\infty$ est majorée par M

Mathémator : J'avoue que c'est difficile à croire, et pourtant la moitié des élèves sont tombés dans le panneau lors de l'épreuve du bac 2003.
Je vous laisse trouver un *contre-exemple.*

VIII - EXERCICES

a. Avec les définitions

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2}$

1. Donner des valeurs approchées à 10^{-3} près de $f(1)$, $f(32)$, $f(320)$ et $f(3232)$.
2. Observer la représentation graphique de f donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de f en $+\infty$?
3. On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 0,01 , c'est-à-dire $]1,99;2,01[$.
   Démontrer que pour $x>10$, $f(x)\in]1,99;2,01[$ (On pourra écrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=2+1/x^2$)
4. On considère l'intervalle $]2-r,2+r[$ avec $r>0$.
   Montrer que pour x supérieur à un certain x_0 à déterminer en fonction de r , tous les $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $]2-r,2+r[$.
5. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

Exercice 2

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $3x^3+x^2$

1. Donner les valeurs de $g(32)$, $g(320)$ et $g(3232)$.
2. Observer la représentation graphique de g donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de g en $+\infty$?
3. On considère l'intervalle $]100;+\infty[$. Démontrer que pour $x>10$, $f(x)\in\ ]100,+\infty[$.
4. On considère un intervalle $]\mathrm{A},+\infty[$, avec $\mathrm{A}>0$. Montrer que pour x supérieur à $\sqrt{\mathrm{A}}$, tous les $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $]\mathrm{A};+\infty[$.

Exercice 3

Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=-2x+3$
Démontrez que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Exercice 4

On considère la fonction h définie sur $]1,+\infty[$ par $h(x)=2+\dfrac{3}{(x-1)^2}$

1. Justifiez que h est bien définie sur $]1,+\infty[$.
2. Observer la représentation graphique de h donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de h en 1 ?
3. On considère l'intervalle $]1000;+\infty[$. Donnez une condition suffisante portant sur x pour que $h(x)\in\ ]1000,+\infty[$.
4. On considère un intervalle $]\mathrm{A},+\infty[$, avec $\mathrm{A}>2$. Donnez une condition suffisante portant sur x pour que $h(x)\in]\mathrm{A};+\infty[$.
5. Justifiez que $\lim\limits_{x\to1} h(x)=+\infty$.

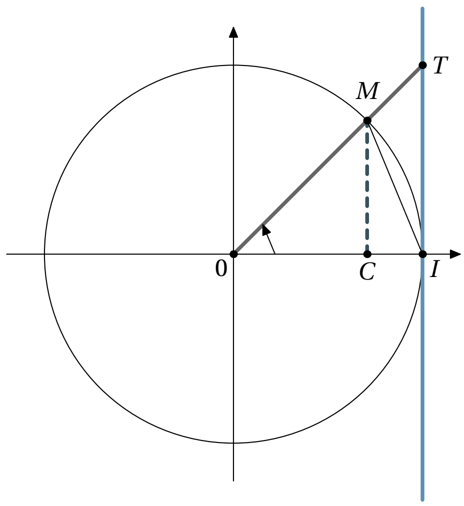
b. Avec les théorèmes

Exercice 5 Limite en zéro

Soit $f\ :\ x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$. Étudiez sa limite en zéro.

Exercice 6 De la géométrie pour calculer une limite

Voici une première méthode de calcul de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$. Pourquoi suffit-il d'étudier la limite pour des valeurs de $x > 0$?



Utilisez la figure pour obtenir que, pour tout $x \in]0, \pi/2[$,

$$\sin x < x < \tan x$$

Déduisez-en un encadrement de $\dfrac{\sin x}{x}$ pour tout $x \in]0, \pi/2[$ et concluez après avoir étudié la parité de la fonction.

Exercice 7 Limites trigonométriques

En supposant connu le résultat de l'exercice précédent, calculez $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Pour la 2ème, utilisez la formule bien connue $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$

Exercice 8 Limite et radicaux

Calculez $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$

c. Calculs stakhanovistes

Applications directes du cours

Exercice 9

Étudier les limites des fonctions suivantes au voisinage de $+\infty$:

1. x^2-5x+6 ;
2. $-4x^2+6x-7$;
3. $\dfrac{2x+1}{x-1}$;
4. $\dfrac{2x^2-3x+5}{x^3+x-3}$;
5. $\dfrac{x^3}{x^2+1}-x$;
6. $\dfrac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$.

Exercice 10

Étudier les limites des fonctions suivantes au voisinage de $+\infty$:

1. $\dfrac{x+\sin(x)}{-2x+\cos(x)}$;
2. $2x-\sqrt{x^2+3x-1}$;
3. $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x}$.

Exercice 11

Étudier les limites des fonctions suivantes au voisinage de a :

- $\dfrac{x+4}{x^2+3x+2}$ en $a=-2$;
- $\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$ en $a=-2$;
- $\dfrac{-x^2+x+6}{2x^2-5x+2}$ en $a=2$;
- $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ en $a=0$;
- $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ en $a=0$;
- $\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ en $a=0$;
- $\tan(x)$ en $a=\frac{\pi}{2}$;
- $\dfrac{\sin(3x)}{x}$ en $a=0$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{-x^3+2x^2-x+3}{x^2+1}.$$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x^2+1}$.

2. Calculer la limite de $f(x)-(ax+b)$ en $+\infty$ puis en $-\infty$.

3. En déduire que la courbe représentative de f, $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ en $-\infty$ et en $+\infty$.

4. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de Δ.

Approfondissement

Exercice 13

Étudier les limites des fonctions suivantes :

1. $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ en $+\infty$;

2. $x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1\right)$ en $+\infty$;

3. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}}{x^2-2x}$ en 2 ;

4. $\dfrac{\tan(x)}{x}$ en 0 ;

5. $\dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ en 0 avec $ab\neq 0$;

6. $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.

Exercice 14

Étudier selon les valeurs de a et de b les limites de

– $f : x \mapsto \sqrt{x^2+5x+1}+ax+b$ en $+\infty$ et en $-\infty$

– $g : x \mapsto \frac{ax^2-(2a+1)x+2}{x-1}$ en 1.

IX - Recettes à Bac

a. Comment étudier la position relative de deux courbes ?

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y=f(x)$ et $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y=g(x)$. Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, il faut étudier le signe de $f(x)-g(x)$.
En effet, si nous obtenons par exemple $f(x)-g(x)\geqslant 0$ sur l'intervalle I, alors $f(x)\geqslant g(x)$ sur I et donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{C}'$ sur I.

b. Comment montrer qu'une courbe admet une asymptote d'équation $y=ax+b$ au voisinage de ω ?

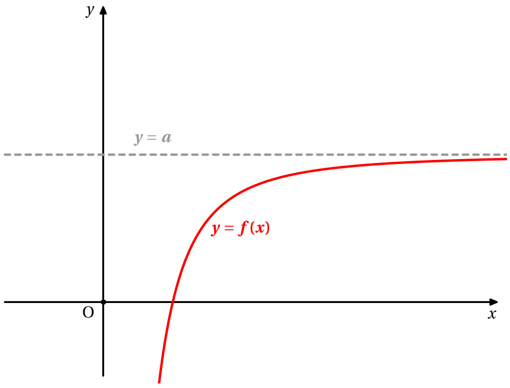
Il suffit de montrer que $\left[f(x)-(ax+b)\right]$ tend vers 0 quand x tend vers ω.

Asymptote horizontale

Définition 1.7
Si une fonction f vérifie

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$$

alors la droite d'équation $y=\ell$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de f.



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2.$$

☺ **Exemple 1.1**
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + 1}.$$

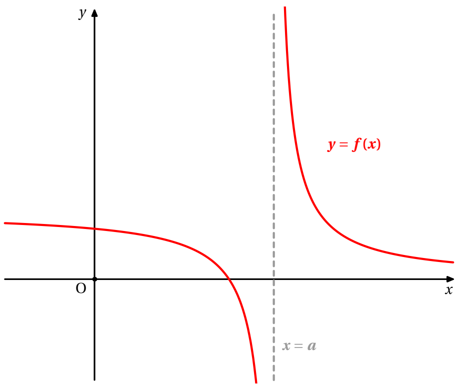
Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Asymptote verticale

Définition 1.8
Soit a un réel. Si une fonction f vérifie

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.



$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty.$$

☺ **Exemple 1.2**
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

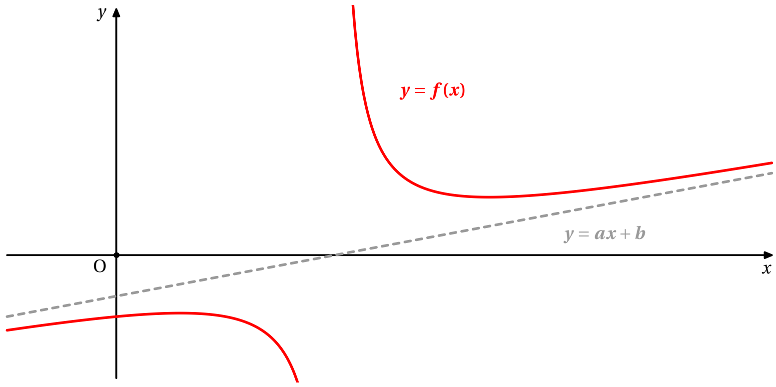
Étudier les limites de f au voisinage de 1 puis interpréter graphiquement ce résultat.

Asymptote oblique

Définition 1.9
Soit Δ la droite d'équation $y = mx + p$. Si une fonction f vérifie

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (mx + p)\big) = 0$$

alors la droite d'équation Δ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ à la courbe représentative de f.



$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(mx+p)\big)=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(mx+p)\big)=0.$$

☺ **Exemple 1.3**
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2}+2x-1.$$

Prouver que la droite Δ d'équation $y=2x-1$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

c. Comment montrer qu'une fonction est paire ?

Il faut vérifier que l'ensemble de définition de f est symétrique par rapport à zéro puis que pour tout réel x de l'ensemble de définition $f(-x)=f(x)$.
Nous en déduisons que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Il suffira donc d'étudier la fonction sur la « moitié » de l'ensemble de définition, puis de déduire le reste de la courbe par symétrie.

d. Comment montrer qu'une fonction est impaire ?

cf le paragraphe précédent en remplaçant $f(-x)=f(x)$ par $f(-x)=-f(x)$ et « symétrique par rapport à l'axe des ordonnées » par « symétrique par rapport à l'origine du repère ».

e. Comment montrer qu'une courbe admet le point $\mathrm{A}(a,b)$ comme centre de symétrie ?

Faîtes avant tout un dessin pour visualiser que A est le milieu du segment $[\mathrm{MM}']$ avec $\mathrm{M}\big(x,f(x)\big)$ et $\mathrm{M}'\big(x',f(x')\big)$. Alors d'une part $\dfrac{x+x'}{2}=a$, donc $x'=2a-x$ et d'autre part $\dfrac{f(x)+f(x')}{2}=b$, *i.e.*

$$f(x)+f(2a-x)=2b$$

f. Comment montrer qu'une fonction est périodique ?

Il s'agit de trouver un réel T tel que pour tout réel x appartenant à l'ensemble de définition de f, alors

$$f(x+\mathrm{T})=f(x)$$

Il suffira alors d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T, par exemple $[0,\mathrm{T}]$, puis de déduire le reste de la courbe par des translations successives de vecteur $k\overrightarrow{i}$, avec $k\in\mathbb{Z}$.
Vous connaissez bien sûr la fonction sinus qui vérifie $\sin(x+2\pi)=\sin x$ pour tout réel x et qui est donc 2π-périodique.

g. Comment étudier le signe d'une expression ?

Vaste problème...Retenir malgré tout qu'en règle général, nous savons étudier le signe d'un produit ou d'un quotient de polynômes du 1^{er} ou du 2^{nd} degré, d'exponentielles (qui sont toujours positives), de cosinus ou de sinus, de logarithmes népériens... Vous chercherez donc en général à factoriser ou à réduire au même dénominateur votre expression.

Si cela s'avère impossible algébriquement, on vous suggérera d'étudier une fonction. Alors soit elle admettra comme extremum zéro, soit vous déterminerez une approximation de la valeur d'annulation de f grâce au théorème de la bijection et vous conclurez à l'aide du tableau de variations.

h. Qu'est-ce qu'une fonction croissante sur I ?

C'est une fonction qui conserve l'ordre sur I.

i. Comment lever une indétermination ?

Il n'y a pas une méthode mais des méthodes. Il ne s'agit donc pas d'apprendre par cœur des recettes (tiens tiens...), ce qui vous induirait à écrire de grosses sottises.
Vous pouvez dans un premier temps repérer des termes « négligeables » devant d'autres et factoriser par le plus « fort » (c'est le cas par exemple des fonctions rationnelles au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$).
Vous pouvez minorer ou majorer par des valeurs permettant de conclure à l'aide des théorèmes de comparaison (c'est le cas de la fonction cosinus qui vérifie

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

pour tout réel x et donc

$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\cos x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

pour $x \neq 0$ et finalement

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

par application du théorème des gendarmes.
Vous pouvez utiliser les propriétés algébriques de certaines fonctions pour retrouver des limites connues ($x^2+1 = \sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}$...)
Dans le cas de l'étude de limites de fonctions irrationnelles, le recours à la quantité conjuguée peut s'avérer utile.
Dans les cas désespérés, vous pouvez essayer de reconnaître la limite d'un taux de variation et donc utiliser la dérivée associée.