ARITHMÉTIQUE II
Nombres Premiers

Guillaume CONNAN

Lycée Jean PERRIN

Mars 2008

Sommaire

Sommaire

Quoi de plus simple qu'un nombre premier :

Définition

Un entier naturel est dit premier s'il est supérieur (i.e. supérieur ou égal) à 2 et n'est divisible que par 1 et lui-même.

Propriété

Tout entier naturel admet au moins un diviseur premier.

Théorème

Il y a une infinité de nombres premiers.

Comment vérifier qu'un nombre est premier ?

Sortons nos machines et observons les diviseurs de 1321 par exemple : si aucune des 1319 divisions ne « tombe juste », alors on pourra dire que 1321 premier. Et puis d'abord, il est impair, il ne semble pas être divisible par 3, alors pourquoi pas...

diviseur	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
quotient	660,5	440,3	330,3	264,2	220,2	188,7	165,1	146,8	132,1	120,1	110,1	101,6
diviseur	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
quotient	94,36	88,07	82,56	77,71	73,39	69,53	66,05	62,90	60,05	57,43	55,04	52,84
diviseur	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
quotient	50,81	48,93	47,18	45,55	44,03	42,61	41,28	40,03	38,85	37,74	36,69	35,70

Définition

Un entier naturel *autre que 1* qui n'est pas premier est dit **composé**.

Sommaire

Premier or not premier ?

```
test1(n):={
local k;
L:=[]; //on crée une liste vide au départ pour y placer les diviseurs de n
for(k:=2;k*k<=n;k++){ //pour travailler sans approximation
if (n mod k==0) {return n+'' n'est pas premier''//si k divise n, n n'est pas premier
}}
return n+" est premier."// sinon n est premier
}:;
```

Crible d'Ératosthène

```
Erato(n):={
local x,j,k,m,q,P;
x:=[seq(1,j=1..n+1)] // on crée une liste de n+1 nombres valant tous 1 au départ
x[1]:=0; // 0 et 1 ne sont pas premiers donc on les "raye" en leur associant 0
for(k:=2;k*k<=n;k++){ // on teste les entiers de 2 à racine carrée de n
if (x[k]==1) { // si le keme nombre n'est pas barré
for(m:=2;m<=floor(n/k);m++){
x[k*m]:=0; // on barre tous ses multiples
}}}
P:=[]; // on crée une liste vide
for(q:=2;q<=n;q++){
if (x[q]==1) { // si q n'est pas barré
P:=append(P,q); // on ajoute q à la liste des premiers
}
}
return P
}:;
```

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195
196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225
226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255
256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285
286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315
316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195
196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225
226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255
256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285
286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315
316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195
196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225
226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255
256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285
286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315
316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195
196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225
226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255
256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285
286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315
316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195
196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225
226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255
256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285
286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315
316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195
196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225
226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255
256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285
286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315
316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195
196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225
226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255
256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285
286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315
316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195
196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225
226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255
256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285
286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315
316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195
196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225
226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255
256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285
286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315
316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330

Sommaire

Propriété

Tout entier n supérieur à 2 se décompose en produit fini de nombres premiers.

La démonstration la plus simple (mais pas la plus intéressante) consiste à raisonner par récurrence sur n.

Propriété

Tout entier n supérieur à 2 se décompose en produit fini de nombres premiers.

La démonstration la plus simple (mais pas la plus intéressante) consiste à raisonner par récurrence sur n.

Propriété

Tout entier n supérieur à 2 se décompose en produit fini de nombres premiers.

La démonstration la plus simple (mais pas la plus intéressante) consiste à raisonner par récurrence sur n.

Théorème

Tout entier n supérieur à 2 admet une et une seule (à l'ordre près des termes) décomposition en produit fini de nombres premiers

Décomposition informatique

```
decompo(n):={
local L,D,N,k;
D:=[]; //liste des diviseurs premiers, vide au départ
L:=Erato(n); // on utilise la procédure précédente
N:=n; // N est l'entier mobile dont on cherche les diviseurs
while (contains(L,N)==0){ // tant que N n'est pas premier
for(k:=0;k<length(L);k++){// length(L)=nombre d'éléments de L
if (N mod L[k]==0){ D:=append(D,L[k]); // si le keme premier divise N, on le rajoute à D
N:=iquo(N,L[k]); // on divise N par ce nombre premier
break; // on recommence la boucle au cas où le keme premier divise encore n
}
}
}
D:=append(D,N); // on n'oublie pas n au cas où il est premier
}:;
```

Pour être honnête, il existe la fonction ifactor qui donne directement la décomposition en produit de facteurs premiers.

```
ifactor(500) ;
```

Exercice

- ***Démonstration de cours.***

  Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

- *Soit p un nombre premier strictement plus grand que 2. Démontrer que p est congru à 1 ou à -1 modulo 4. Donner deux exemples de chacun de ces cas.*

  Le but de ce qui suit est de répondre à la question suivante : « Les nombres premiers p congrus à -1 modulo 4 sont-ils en nombre fini ? »

  Supposons que ce soit le cas : soit n le nombre des nombres premiers congrus à -1 modulo 4 ; notons $A = p_1 p_2 \cdots p_n$ le produit de ces nombres et $B = 4A - 1$.

- *Montrer que B est congru à -1 modulo 4.*

- *Soit q un diviseur premier de B. Montrer que q est distinct de chacun des nombres $p_1, p_2, \cdots, p_n$ précédents.*

  Montrer que parmi les diviseurs premiers de B, l'un au moins est congru à -1 modulo 4.

- *Quelle réponse apporter à la question posée ?*

Exercice

- ***Démonstration de cours.***
  Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
- *Soit p un nombre premier strictement plus grand que 2. Démontrer que p est congru à 1 ou à -1 modulo 4. Donner deux exemples de chacun de ces cas.*
  Le but de ce qui suit est de répondre à la question suivante : « Les nombres premiers p congrus à -1 modulo 4 sont-ils en nombre fini ? »
  Supposons que ce soit le cas : soit n le nombre des nombres premiers congrus à -1 modulo 4 ; notons $A = p_1 p_2 \cdots p_n$ le produit de ces nombres et $B = 4A - 1$.
- *Montrer que B est congru à -1 modulo 4.*
- *Soit q un diviseur premier de B. Montrer que q est distinct de chacun des nombres $p_1, p_2, \cdots, p_n$ précédents.*
  Montrer que parmi les diviseurs premiers de B, l'un au moins est congru à -1 modulo 4.
- *Quelle réponse apporter à la question posée ?*

Exercice

- ***Démonstration de cours.***
  Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
- *Soit p un nombre premier strictement plus grand que 2. Démontrer que p est congru à 1 ou à -1 modulo 4. Donner deux exemples de chacun de ces cas.*
  Le but de ce qui suit est de répondre à la question suivante : « Les nombres premiers p congrus à -1 modulo 4 sont-ils en nombre fini ? »
  Supposons que ce soit le cas : soit n le nombre des nombres premiers congrus à -1 modulo 4 ; notons $A = p_1 p_2 \cdots p_n$ le produit de ces nombres et $B = 4A - 1$.
- *Montrer que B est congru à -1 modulo 4.*
- *Soit q un diviseur premier de B. Montrer que q est distinct de chacun des nombres p_1, p_2, $\cdots$, p_n précédents.*
  Montrer que parmi les diviseurs premiers de B, l'un au moins est congru à -1 modulo 4.
- *Quelle réponse apporter à la question posée ?*

Exercice

- ***Démonstration de cours.***
  Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
- *Soit p un nombre premier strictement plus grand que 2. Démontrer que p est congru à 1 ou à -1 modulo 4. Donner deux exemples de chacun de ces cas.*
  Le but de ce qui suit est de répondre à la question suivante : « Les nombres premiers p congrus à -1 modulo 4 sont-ils en nombre fini ? »
  Supposons que ce soit le cas : soit n le nombre des nombres premiers congrus à -1 modulo 4 ; notons $A = p_1 p_2 \cdots p_n$ le produit de ces nombres et $B = 4A - 1$.
- *Montrer que B est congru à -1 modulo 4.*
- *Soit q un diviseur premier de B. Montrer que q est distinct de chacun des nombres $p_1, p_2, \cdots, p_n$ précédents.*
  Montrer que parmi les diviseurs premiers de B, l'un au moins est congru à -1 modulo 4.
- *Quelle réponse apporter à la question posée ?*

Exercice

- ***Démonstration de cours.***
  Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
- *Soit p un nombre premier strictement plus grand que 2. Démontrer que p est congru à 1 ou à -1 modulo 4. Donner deux exemples de chacun de ces cas.*
  Le but de ce qui suit est de répondre à la question suivante : « Les nombres premiers p congrus à -1 modulo 4 sont-ils en nombre fini ? »
  Supposons que ce soit le cas : soit n le nombre des nombres premiers congrus à -1 modulo 4 ; notons $A = p_1 p_2 \cdots p_n$ le produit de ces nombres et $B = 4A - 1$.
- *Montrer que B est congru à -1 modulo 4.*
- *Soit q un diviseur premier de B. Montrer que q est distinct de chacun des nombres $p_1, p_2, \cdots, p_n$ précédents.*
  Montrer que parmi les diviseurs premiers de B, l'un au moins est congru à -1 modulo 4.
- *Quelle réponse apporter à la question posée ?*

Exercice

- ***Démonstration de cours.***
  Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
- *Soit p un nombre premier strictement plus grand que 2. Démontrer que p est congru à 1 ou à -1 modulo 4. Donner deux exemples de chacun de ces cas.*
  Le but de ce qui suit est de répondre à la question suivante : « Les nombres premiers p congrus à -1 modulo 4 sont-ils en nombre fini ? »
  Supposons que ce soit le cas : soit n le nombre des nombres premiers congrus à -1 modulo 4 ; notons $A = p_1 p_2 \cdots p_n$ le produit de ces nombres et $B = 4A - 1$.
- *Montrer que B est congru à -1 modulo 4.*
- *Soit q un diviseur premier de B. Montrer que q est distinct de chacun des nombres p_1, p_2, $\cdots$, p_n précédents.*
  Montrer que parmi les diviseurs premiers de B, l'un au moins est congru à -1 modulo 4.
- *Quelle réponse apporter à la question posée ?*

Exercice

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés : nous allons en découvrir quelques-unes.
Pour k un entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit avec k chiffres 1.

- *Citez deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifiez rapidement votre réponse.*
- *À quelle condition sur k le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit N_k ? Justifiez brièvement votre réponse.*
- *Pour $k \geqslant 1$, $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}$ Justifiez l'égalité suivante pour tout $k \geqslant 1$*

$$9N_k = 10^k - 1$$

- *Le tableau ci-dessous donne les restes de la division par 7 de 10^k, pour $k \in [\![1,8]\!]$*

k	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Reste de la division de 10^k par 7	*3*	*2*	*6*	*4*	*5*	*1*	*3*	*2*

Soit k un entier strictement positif. Démontrez que

$$10^k \equiv 1[7] \Longleftrightarrow k \text{ est un multiple de } 6$$

Déduisez-en que 7 divise N_k si et seulement si 6 divise k.

Exercice

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés : nous allons en découvrir quelques-unes.
Pour k un entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit avec k chiffres 1.

- *Citez deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifiez rapidement votre réponse.*
- *À quelle condition sur k le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit N_k ? Justifiez brièvement votre réponse.*
- *Pour $k \geqslant 1$, $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}$ Justifiez l'égalité suivante pour tout $k \geqslant 1$*

$$9N_k = 10^k - 1$$

- *Le tableau ci-dessous donne les restes de la division par 7 de 10^k, pour $k \in [\![1,8]\!]$*

k	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division de 10^k par 7	3	2	6	4	5	1	3	2

Soit k un entier strictement positif. Démontrez que

$$10^k \equiv 1[7] \Longleftrightarrow k \text{ est un multiple de } 6$$

Déduisez-en que 7 divise N_k si et seulement si 6 divise k.

Exercice

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés : nous allons en découvrir quelques-unes.
Pour k un entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit avec k chiffres 1.

- *Citez deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifiez rapidement votre réponse.*
- *À quelle condition sur k le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit N_k ? Justifiez brièvement votre réponse.*
- *Pour $k \geqslant 1$, $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}$ Justifiez l'égalité suivante pour tout $k \geqslant 1$*

$$9N_k = 10^k - 1$$

- *Le tableau ci-dessous donne les restes de la division par 7 de 10^k, pour $k \in [\![1,8]\!]$*

k	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division de 10^k par 7	3	2	6	4	5	1	3	2

Soit k un entier strictement positif. Démontrez que

$$10^k \equiv 1[7] \iff k \text{ est un multiple de } 6$$

Déduisez-en que 7 divise N_k si et seulement si 6 divise k.

Exercice

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés : nous allons en découvrir quelques-unes.
Pour k un entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit avec k chiffres 1.

- *Citez deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifiez rapidement votre réponse.*
- *À quelle condition sur k le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit N_k ? Justifiez brièvement votre réponse.*
- *Pour $k \geqslant 1$, $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}$ Justifiez l'égalité suivante pour tout $k \geqslant 1$*

$$9N_k = 10^k - 1$$

- *Le tableau ci-dessous donne les restes de la division par 7 de 10^k, pour $k \in [\![1,8]\!]$*

k	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division de 10^k par 7	3	2	6	4	5	1	3	2

Soit k un entier strictement positif. Démontrez que

$$10^k \equiv 1[7] \Longleftrightarrow k \text{ est un multiple de } 6$$

Déduisez-en que 7 divise N_k si et seulement si 6 divise k.

Exercice

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés : nous allons en découvrir quelques-unes.
Pour k un entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit avec k chiffres 1.

- *Citez deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifiez rapidement votre réponse.*
- *À quelle condition sur k le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit N_k ? Justifiez brièvement votre réponse.*
- *Pour $k \geqslant 1$, $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}$ Justifiez l'égalité suivante pour tout $k \geqslant 1$*

$$9N_k = 10^k - 1$$

- *Le tableau ci-dessous donne les restes de la division par 7 de 10^k, pour $k \in [\![1,8]\!]$*

k	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division de 10^k par 7	3	2	6	4	5	1	3	2

Soit k un entier strictement positif. Démontrez que

$$10^k \equiv 1[7] \Longleftrightarrow k \text{ est un multiple de } 6$$

Déduisez-en que 7 divise N_k si et seulement si 6 divise k.