Bac gris de mathématiques - T$^{\text{ale}}$STI GE
Mercredi 23 mai 2007 - 4 heures

EXERCICE 1 **4 points**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 3 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = 1 - i\sqrt{3}$; i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. a) Écrire z_A et z_B sous forme trigonométrique, puis sous forme exponentielle.

b) En utilisant la règle et le compas, placer les points A et B dans le repère $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$. On laissera apparents les traits de construction.

c) Démontrer que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

2. Dans ce qui suit, on considère la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On appelle C l'image du point A par cette rotation.

a) Placer le point C dans le repère $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$. On laissera apparents les traits de construction.

b) Déterminer l'affixe z_C du point C sous forme exponentielle.

c) Quelle est l'image du point B par la rotation ? Justifier.

d) En déduire l'image du triangle OAB par la rotation.

EXERCICE 2 **5 points**

Un circuit électrique comprend en série un générateur, un conducteur ohmique de résistance R (exprimée en ohms), un condensateur de capacité C (exprimée en farads) et un interrupteur. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et le générateur délivre alors une tension constante E (exprimée en volts). On procède ainsi à la charge du condensateur.

La charge q en coulombs du condensateur est une fonction dérivable du temps t (exprimé en secondes) ; l'intensité i du courant (exprimée en ampères) est alors telle que $i(t) = q'(t)$.
On considère l'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{RC}y = \frac{E}{R}$$

dans laquelle y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dans tout ce qui suit, on prend $R = 1\,000$, $C = 10^{-4}$ et $E = 10$.

1. Écrire l'équation différentielle ci-dessus en remplaçant R, C et E par leurs valeurs respectives.

2. On admet que la fonction q est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$q(t) = -10^{-3}e^{-10t} + 10^{-3}.$$

a) Déterminer la fonction dérivée q' de la fonction q, puis vérifier que q est solution sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle établie à la question 1.

b) Déterminer $q(0)$, la limite de q en $+\infty$ et le sens de variations de q sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. On admet que l'intensité du courant i qui parcourt le circuit à l'instant t est donnée par $i(t) = 10^{-2}e^{-10t}$.
Déterminer la valeur exacte de l'instant t_0 à partir duquel l'intensité $i(t)$ est inférieure ou égale à 10^{-3} ampère. Préciser sa valeur arrondie au centième de seconde.

4. On sait enfin que l'énergie W dissipée dans le conducteur ohmique, exprimée en joules, entre les instants $t = 0$ et $t = 0,23$, est donnée par :
$W = 1\,000 \displaystyle\int_0^{0,23} i^2(t)\,dt.$

a) Préciser une primitive de la fonction h définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(t) = e^{-20t}$.

b) Calculer alors W et en donner la valeur arrondie à 10^{-3} près.

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction f définie et dérivable sur v dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 1 cm est donnée en annexe. Cette courbe passe par le point A(1 ; 4).

Dans la Partie I, le but est de déterminer graphiquement certaines propriétés de la fonction f. On prouve ensuite ces propriétés dans la Partie II à partir de l'expression de $f(x)$. Enfin, dans la Partie III, on s'intéresse à un calcul d'aire.

Partie I

On répondra aux questions suivantes en utilisant la représentation graphique donnée en annexe. Si cela n'est pas demandé explicitement, on ne justifiera pas la réponse.

1. a) On admet que la fonction f est décroissante sur $]0\,;1[$ et que l'axe des ordonnées est asymptote à $\mathscr{C}_f$. Donner $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b) Peut-on donner $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ à partir du graphique ? Pourquoi ?

2. a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[1\,; 15]$, deux solutions ; on notera α et β ces solutions, avec $\alpha < \beta$.

b) Donner un encadrement d'amplitude 0,5 pour chacun des deux nombres α et β.

c) Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x dans l'intervalle $[1\,; 15]$.

3. On admet que la droite passant par les points A(1 ; 4) et B(2 ; −2) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.

a) Donner la valeur de $f'(1)$.

b) Donner, en justifiant, une équation de la droite (AB).

Partie II

On admet maintenant que la fonction f est définie sur $]0\,; +\infty[$ par

$$f(x) = 2\left(\ln(x)\right)^2 - 6\ln(x) + 4.$$

Le but de cette partie est de démontrer les résultats obtenus à la Partie I, en utilisant l'expression de $f(x)$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Quelle propriété graphique de la courbe $\mathscr{C}_f$ retrouve-t-on ainsi ?

b) Démontrer que pour $x \neq 1$ on a $f(x) = \left(\ln(x)\right)\left[2\ln(x) - 6 + \dfrac{4}{\ln(x)}\right]$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. a) Démontrer que $f'(x) = \dfrac{4\ln(x) - 6}{x}$ ou f' désigne la dérivée de f.

b) Résoudre dans l'intervalle $]0\,; +\infty[$ l'inéquation $4\ln(x) - 6 > 0$.

c) En déduire le sens de variations de f et dresser le tableau de variations de f. On calculera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\,; +\infty[$.

3. a) En utilisant les résultats de la question 2 démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[1\,; 15]$.

b) Donner les valeurs exactes de $f\left(\sqrt{\text{e}}\right)$, $f(\text{e})$ et $f\left(\text{e}^2\right)$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[1\,; 15]$.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

Partie III

1. Sur la feuille annexe **à rendre avec la copie**, hachurer le domaine D délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

2. Démontrer que la fonction F définie sur $]0\,; +\infty[$ par $\text{F}(x) = 2x\left(\ln(x)\right)^2 - 10x\ln(x) + 14x$ est une primitive de f sur $]0\,; +\infty[$.

3. a) En déduire l'expression de l'aire, en unités d'aire, du domaine D sous la forme d'une intégrale.

b) Donner la valeur exacte de cette aire en cm^2, puis sa valeur en mm^2, arrondie à l'unité.

Feuille annexe à rendre avec la copie