Chapitre 1

Limites et continuité

La notion de limite (de suite ou de fonction) abordée graphiquement et intuitivement apparaît dans les programmes dès la classe de première, elle est ensuite approfondie en classe de terminale en s'appuyant sur la notion d'intervalle maîtrisée en fin de classe de seconde. Il est exclu, au lycée, d'employer les notations apprises dans les sections post-baccalauréat (epsilon et autres quantificateurs ...). Nous les utiliseront cependant dans la suite de ce cours afin de prendre un recul nécessaire quant à l'enseignement dispensé dans le secondaire et de simplifier les démonstrations (peu nombreuses) de propriétés ou autres théorèmes.

Dans tout le chapitre et sauf mention expresse du contraire, on considère des fonctions de variable réelle à valeurs réelles.

1.1 Limites de fonctions

1.1.1 Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle non majoré. On dit que :

- f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si : $\forall A > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall x > x_0, f(x) > A$.
- f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si : $\forall B > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall x > x_0, f(x) < B$.
- f tend vers le réel ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si : $\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall x > x_0, |f(x) - \ell| < \epsilon$.

De façon analogue, si f est définie sur un intervalle non minoré. On dit que :

- f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si : $\forall A > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall x < x_0, f(x) > A$.
- f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si : $\forall B < 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall x < x_0, f(x) < B$.
- f tend vers le réel ℓ lorsque x tend vers $-\infty$ si : $\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall x < x_0, |f(x) - \ell| < \epsilon$.

1.1.2 Limites en un réel α

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a\,; b[$ et $\alpha \in I$. On dit que :

- f tend vers ℓ lorsque x tend vers α si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : x \in I, |x - \alpha| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

.

Propriété 1.1 *Si f admet une limite finie ℓ en α alors ℓ est unique. On écrit :* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell$.

Définition 1.1 *Si* $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ *existe alors on dit que f est continue en α, on a alors* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$.

Définition 1.2 *Si f est continue en tout point α de I alors on dit que f est continue sur I.*

Propriété 1.2 *Si f est continue en α alors f est bornée au voisinage de α.*

Il est fréquent d'étudier des fonctions n'étant pas définies en un point α de l'intervalle I mais seulement sur un voisinage de celui-ci, ce type d'étude conduit naturellement à la notion de limite à gauche et de limite à droite.

1.1.3 Limites à gauche, limites à droite

Soit I un intervalle et α appartenant à I,f une fonction définie sur I non nécéssairement définie en α.

On dit que :

- f tend vers ℓ lorsque x tend vers α à gauche si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : 0 < \alpha - x < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

.

- f tend vers ℓ lorsque x tend vers α à droite si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : 0 < x - \alpha < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

.

Il est aisé d'établir les définitions analogues lorsque la limite de f, à gauche ou à droite, est infinie. Ces définitions ont pour conséquence qu'une fonction f définie en α est continue en α si et seulement si les limites de $f(x)$ quand x tend vers α à gauche et à droite existent et sont égales à $f(\alpha)$.

Définition 1.3 *On dit que f est prolongeable par continuité en α si f n'est pas définie en α et si $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ existe. Dans ce cas, la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in I$ et $\tilde{f}(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} f(x)$ est appelée prolongement par continuité de f en α.*

Théorème 1.3 *La somme, le produit et la composée de deux fonctions continues sont continues.*

1.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème suivant permet de préciser l'existence de solutions pour des équations mettant en jeu des fonctions continues.

Théorème 1.4 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution appartenant à l'intervalle $[a\,;b]$.*

Si on suppose en plus que la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[a\,;b]$, on obtient l'unicité de la solution.

Théorème 1.5 (Théorème de la bijection) *Soit f une fonction continue strictement monotone sur l'intervalle $[a\,;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède une unique solution appartenant à l'intervalle $[a\,;b]$.*

Ce théorème est parfois énoncé sous une forme équivalente :

Théorème 1.6 *Soit f une fonction continue strictement monotone sur l'intervalle $[a\,;b]$.*
Si $f(a)f(b) < 0$ alors f s'annule une et une seule fois sur $[a\,;b]$.

1.3 Théorèmes de comparaison

Théorème 1.7 (Théorème des gendarmes) *Soif f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle non majoré. S'il existe un réel A tel que pour tout $x \in [A\,;+\infty[$ on ait : $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.*

N.B : on établit un théorème analogue lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers un réel α en adaptant l'ensemble de définition des fonctions et le voisinage sur lequel on établit l'encadrement.

Théorème 1.8 (Théorème de comparaison 1) *Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle non majoré. S'il existe un réel A tel que pour tout $x \in [A\,;+\infty[$ on ait : $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$*

Théorème 1.9 (Théorème de comparaison 2) *Soit g et h deux fonctions définies sur un intervalle non majoré. S'il existe un réel A tel que pour tout $x \in [A\,;+\infty[$ on ait : $g(x) \leqslant h(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$*

N.B : on établit des théorèmes analogues lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers un réel α en adaptant l'ensemble de définition des fonctions et le voisinage sur lequel on établit l'encadrement.

1.4 Asymptotes et branches paraboliques

On munit le plan d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ et on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f.

1.4.1 Asymptotes d'équation $x = \alpha$

Si $lim_{x\to\alpha} = \infty$ alors la droite d'équation $x = \alpha$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

1.4.2 Asymptotes d'équation $y = a$

Si $lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ (resp. $lim_{x\to-\infty} f(x) = a$) alors la droite d'équation $y = a$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

N.B : $lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ est équivalent à $lim_{x\to+\infty} (f(x) - a) = 0$.

1.4.3 Asymptotes obliques et branches paraboliques

Soit f une fonction définie sur un intervalle non majoré, si $lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ alors une étude complémentaire est nécéssaire. On calcule $lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, trois cas se présentent :

- $lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, on dit que $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.
- $lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.
- $lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, il faut dans ce cas calculer $lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax)$:
  - Soit $lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = b$, auquel cas la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
  - Soit $lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \infty$, on dit que $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ en $+\infty$.

N.B : les définitions ci-dessus sont analogues lorsque x tend vers $-\infty$.

Chapitre 2

Dérivabilité

2.1 Nombre dérivé d'une fonction

Définition 2.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$ alors on dit que la fonction f est dérivable en a et que le nombre dérivé de f en a est ℓ. On écrit $f'(a) = \ell$.*

N.B : i. le nombre dérivé d'une fonction en a est la limite du taux de variation de f entre a et x où x appartient à I. C'est aussi le coefficient directeur de la tangente à la courbe réprésentative de f en a puisque la tangente peut être vue comme position limite des sécantes à la courbe de f en a lorsque x tend vers a.
ii. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$ est équivalent à $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$ en posant $x = a + h$.

Définition 2.2 *Si f est dérivable en tout point $a \in I$ alors on dit que f est dérivable sur I.*

Théorème 2.1 *Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I, la réciproque est fausse.*

2.2 Fonctions dérivables et opérations

Tableau des dérivées des fonctions usuelles et règles opératoires. f, g et u sont des fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée	Validité
x^n $(n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
x^α $(\alpha \in \mathbb{Z})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}; k \in \mathbb{Z}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$f+g$	$f'+g'$	I
$f.g$	$f'.g+f.g'$	I
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'.g-f.g'}{g^2}$	$I \cap \{x\,; g(x) \neq 0\}$
u^n $n \in \mathbb{N}$	$nu'.u^{n-1}$	I
$f \circ u$	$(f' \circ u).u'$	I si f dérivable sur $u(I)$
e^u	$u'e^u$	I
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$I \cap \{x\,; u(x) > 0\}$

2.3 Applications de la dérivation

2.3.1 Équation de la tangente

Soit f dérivable sur I et $a \in I$, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f en a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

2.3.2 Approximation affine d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Comme f est dérivable en a, on peut écrire : $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$, c'est à dire :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = 0 \text{ où } f'(a) = \ell$$

En posant $\epsilon(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$ on peut alors écrire :

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\epsilon(h)$$

où $\epsilon(h)$ est une fonction telle que $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. cette dernière expression appelée développement limité d'ordre 1 de f en a, ceci est équivalent à dire que lorsque h tend vers 0, $f(a+h) \simeq f(a)+hf'(a)$, cette dernière formulation est l'approximation affine de f au voisinage de a.

2.3.3 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 2.2 *Si f est une fonction dérivable et strictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$ et si f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur J et :*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

2.3.4 Dérivée et sens de variation

Théorème 2.3 *Soit I un intervalle et f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$. La fonction f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$ (resp. $\forall x \in I, f'(x) \leqslant 0$).*

N.B : Si f' est positive (resp. négative) sur I sauf peut-être en un nombre fini de points où elle s'annule alors f est ***strictement*** *croissante (resp. décroissante) sur I.*

2.3.5 Dérivée et extréma

Théorème 2.4 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I qui n'en est pas une borne. Si f présente un extremum local en a et si elle est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.*

Chapitre 3

Théorèmes fondamentaux

Ce chapitre reprend une partie des théorèmes cités dans le précédent et ouvre une voie vers les théorèmes au programme de l'enseignement supérieur, chaque théorème est suivi d'une preuve qui peut être omise en première lecture.

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si a et b sont deux réels appartenant à I tels que $f(a)f(b) \leqslant 0$, alors :*

$$\exists c \in [a\,;b]\ : f(c) = 0$$

preuve :

Supposons $a \leqslant b$ et $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$ (si ce n'est pas le cas on change f en $-f$). Nous allons construire deux suites (a_n) et (b_n) par récurrence : On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$, on a $a_0 \leqslant b_0$ et $f(a_0) \leqslant 0 \leqslant f(b_0)$. Supposons a_n et b_n construits tels que $a_n \leqslant b_n$ et $f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n)$ et notons $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$.

- Si $f(c_n) \leqslant 0$ alors on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$ (1).
- Si $f(c_n) \geqslant 0$ alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$ (2).

Dans les deux cas on a $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b_{n+1}$ et $f(a_{n+1}) \leqslant 0 \leqslant f(b_{n+1})$.

La suite (a_n) est croissante, la suite (b_n) est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant b_n$ par construction.

De plus, $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$ puisque (toujours par construction) l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes et vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n)$, notons c leur limite commune, on a alors $c \in [a\,;b]$ et en passant à la limite, la continuité de f en c donne $f(c) \leqslant 0 \leqslant f(c)$ i.e : $f(c) = 0$ cqfd.

Théorème 3.2 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution appartenant à l'intervalle $[a\,;b]$.*

preuve :

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la fonction g définie par $g(x) = f(x) - k$.

Théorème 3.3 (Corollaire) *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

preuve :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, il faut démontrer que $f(I)$ est un intervalle, c'est à dire :

$$\forall y_1 \in f(I), \forall y_2 \in f(I), [y_1\,;y_2] \subset f(I)$$

Soit $y \in [y_1\,;y_2]$, considérons $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Comme y est compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$, le théorème des valeurs intermédiaires nous donne l'existence d'un élément c appartenant à I tel que $y = f(c)$, donc $y \in f(I)$, cqfd.

Théorème 3.4 *Toute fonction continue sur un segment possède un maximum et un minimum.*

preuve :

Rappel : la borne supérieure (resp. inférieure) d'une fonction sur un intervalle est le plus petit (resp. grand) des majorants (resp. minorants) de cette fonction sur cet intervalle.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$. Démontrons que f admet une borne supérieure M sur $[a\,;b]$ et qu'il existe $x \in [a\,;b]$ tel que $M = f(x)$.
Raisonnons par l'absurde et supposons f non majorée sur $[a\,;b]$, c'est à dire :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in [a\,;b]\ : f(x) > A$$

On peut donc construire une suite (x_n) d'éléments de $[a\,;b]$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \geqslant n \qquad (*)$$

Cette suite étant bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ dont la limite α est dans $[a\,;b]$.

Comme f est continue en α, on en déduit que $(f(x_{\varphi(n)}))$ est une suite convergente donc bornée, ce qui est en contradiction avec $(*)$. Donc f est majorée sur $[a\,;b]$.

Supposons maintenant que $M = supf$ ne soit pas atteint, i.e :

$$\forall x \in [a\,;b], f(x) \neq M$$

La fonction $g : x \longmapsto \frac{1}{M-f(x)}$ est alors définie et continue sur $[a\,;b]$ comme inverse d'une fonction qui ne s'annule pas. Or, d'après la première partie de la démonstration, toute application continue sur $[a\,;b]$ est majorée.

Soit A un majorant strictement positif de g, on a :

$$\forall x \in [a\,;b], g(x) \leqslant A$$

On en déduit :

$$\forall x \in [a\,;b], f(x) \leqslant M - \frac{1}{A}$$

Le réel $M - \frac{1}{A}$ est alors un majorant de f plus petit que M, ce qui contredit le fait que M est la borne supérieure de f sur $[a\,;b]$. Donc il existe $x \in [a\,;b]$ tel que $M = f(x)$.

En appliquant ce qui précède à $-f$ on en déduit que f possède aussi une borne inférieure et que celle-ci est atteinte, cqfd.

Théorème 3.5 *Si f est une fonction continue sur le segment $[a\,;b]$, alors :*

$$f([a\,;b]) = [m\,;M]$$

où $m = \underset{[a\,;b]}{minf}$ *et* $M = \underset{[a\,;b]}{maxf}$.

preuve :

L'image d'un segment par une fonction continue est un intervalle qui contient ses bornes, c'est donc un segment.

3.2 Théorème de Rolle, Théorème des accroissements finis

Théorème 3.6 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I qui n'en est pas une borne. Si f présente un extremum local en a et si elle est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.*

preuve :

Comme a n'est pas une extrémité de l'intervalle I on peut trouver $h_1 > 0$ tel que $[a - h_1\,; a + h_1] \subset I$.

Supposons que f présente un maximum local en a (si ce n'était pas le cas il suffirait de changer f en $-f$), il existe donc $h_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in I, |x - a| \leqslant h_2 \Rightarrow f(x) \leqslant f(a)$$

Soit $h = min(h_1, h_2)$, pour $0 < x - a \leqslant h$ on a alors :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$$

et donc :

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$$

De même, pour $-h \leqslant x - a < 0$, on a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$$

et donc :

$$f'_g(a) = \lim x \to a^- \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$$

Of f est dérivable en a, donc $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a) = 0$ cqfd.

Théorème 3.7 (Théorème de Rolle) *Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a\,; b]$, dérivable sur $]a\,; b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$ alors il existe un réel c appartenant à $]a\,; b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

preuve :

La fonction f étant continue sur $[a\,; b]$, l'image par f du segment $[a\,; b]$ est un segment $[m\,; M]$ avec $m \leqslant M$.

Si $m = M$, la fonction f est constante sur $[a\,; b]$ donc de dérivée nulle sur $]a\,; b[$

Si $m < M$, l'un des réels m ou M est différent de la valeur commune prise par f en a et b. Supposons par exemple $m \neq f(a)$, la fonction atteint alors la valeur m en un point c différent de a et de b, elle admet donc un minimum en ce point c qui appartient à l'intervalle ouvert $]a\,; b[$, ce qui implique $f'(c) = 0$, cqfd.

Théorème 3.8 (Théorème des accroissements finis) *Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a\,; b]$, dérivable sur $]a\,; b[$ alors il existe un réel c appartenant à $[a\,; b]$ tel que :*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

preuve :

Etant donné un réel k, on considère la fonction φ définie sur $[a\,; b]$ par $\varphi(x) = f(x) - k(x - a)$ et l'on choisit k de façon à ce que $\varphi(a) = \varphi(b)$, ce qui donne :

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Comme la fonction φ est continue sur $[a\,; b]$, dérivable sur $]a\,; b[$ et vérifie $\varphi(a) = \varphi(b)$, on peut lui appliquer le théorème de Rolle : il existe donc un réel c appartenant à $]a\,; b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, ce qui équivaut à :

$$f'(c) = k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

cqfd.

3.3 Applications

Théorème 3.9 (Variations d'une fonction) *Soit I un intervalle et f une fonction dérivable sur I. La fonction f est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$ (resp. $\forall x \in I, f(x) \leqslant 0$).*

preuve :

Traitons le premier cas, le second s'en déduit en considérant $-f$.

Si f est croissante, pour tout $a \in I$, le taux d'accroissement de f en a est une fonction positive et sa limite $f'(a)$ est donc positive.

Réciproquement supposons $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$. Soit x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle I vérifiant $x_1 < x_2$. Comme f est continue sur $[x_1\,; x_2]$, dérivable sur $]x_1\,; x_2[$, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis sur le segment $[x_1\,; x_2]$, il existe donc un réel c appartenant à $]x_1\,; x_2[$ tel que :

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \geqslant 0$$

et par suite $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, la fonction f est donc croissante sur I, cqfd.

Théorème 3.10 (Corollaire) *Une fonction dérivable sur un intervalle I est constante si et seulement si sa dérivée est nulle.*

preuve :

Une fonction est constante si et seulement si elle est croissante et décroissante, d'où le résultat en appliquant le théorème précédent.

Théorème 3.11 (Inégalité des accroissements finis) *Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a\,; b]$, dérivable sur $]a\,; b[$ et s'il existe des réels m et M vérifiant :*

$$\forall x \in]a\,; b[, m \leqslant f'(x) \leqslant M$$

alors on a :

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

preuve :

D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction f sur le segment $[a\,; b]$, il existe un réel c tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$. Or, par hypothèse, on a $m \leqslant f'(c) \leqslant M$, ce qui implique :

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

cqfd.

Chapitre 4

Fonctions usuelles

4.1 Fonctions logarithmes et exponentielles

4.1.1 Logarithme népérien

Définition 4.1 *La fonction inverse possède une unique primitive s'annulant en 1 sur $\mathbb{R}_+^\star$, cette primitive s'appelle fonction logarithme népérien et est notée ln. inverse.*

N.B : On verra dans un prochain chapitre que toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives sur I et que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Théorème 4.1 *La fonction logarithme népérien vérifie :*

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2, \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Conséquences :
a. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$,
b. $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(x^n) = n \ln x$,

Propriété 4.2 *La fonction logarithme népérien est une bijection strictement croissante de* $]0\,;+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant :*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

4.1.2 La fonction exponentielle

Définition 4.2 *La bijection réciproque de la fonction logarithme népérien est appelée fonction exponentielle, notée* exp. *C'est une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *vérifiant :*

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$$

De plus elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et* $(\exp x)' = \exp x$.

Propriété 4.3 *La fonction exponentielle possède les propriétés suivantes :*

1. $\exp 0 = 1$.
2. *Pour tous réels* x *et* y, $\exp(x + y) = \exp x \exp y$.
3. *Pour tous réels* x *et* y, $\exp(x - y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$.
4. *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *et tout réel* x, $\exp nx = n \exp x$.

Définition 4.3 *Soit* a *un réel strictement positif et différent de 1, la fonction qui à tout réel strictement positif* x *associe* $\dfrac{\ln x}{\ln(a)}$ *est appelée fonction logarithme de base* a*, elle est notée* $\log_a$.

Définition 4.4 *Soit* a *un réel strictement positif et différent de 1, la bijection réciproque de la fonction logarithme de base* a *est appelée fonction exponentielle de base* a*, elle est définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^\star$ *et notée* $\exp_a$.

N.B : On établit les propriétés analogues à celles de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle (exercice).

Notation :

Soit a un réel strictement positif différent de 1, on a $\exp_a 1 = a$ donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\exp_a n = \exp_a n.1 = (\exp_a 1)^n = a^n$$

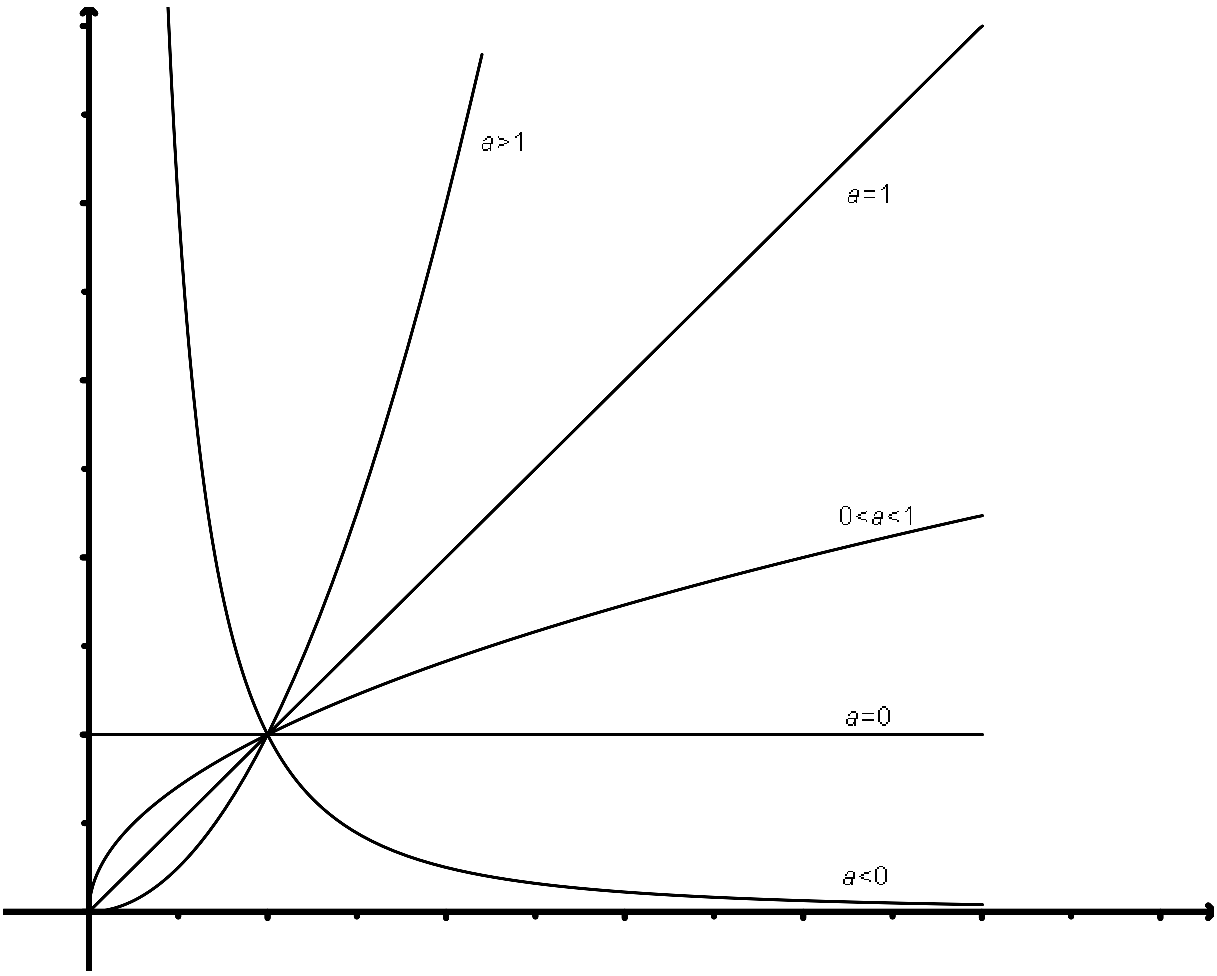
.

On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x = \exp_a x = \exp(x \ln a)$, en particulier on a $\exp x = e^x$.

4.1.3 Les fonctions puissances

Définition 4.5 *La fonction qui à tout réel strictement positif x associe $\exp(a \ln x) = x^a$ avec $a \in \mathbb{R}$ est appelée fonction puissance.*

Représentations graphiques des fonctions puissances :



Propriété 4.4 *Pour tous réels a et b, x et y strictement positifs, on a :*

$$\begin{array}{ccc} x^a y^a = (xy)^a & x^a x^b = x^{a+b} & (x^a)^b = x^{ab} \\ 1^a = 1 & x^0 = 1 & \ln(x^a) = a \ln x \end{array}$$

4.1.4 Les fonctions racines

Pour tout entier naturel n non nul la fonction qui à tout réel positif x associe x^n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa bijection réciproque est appelée fonction racine n-ième, notée $\sqrt[n]{x}$.
N.B : Lorsque n est impair on peut définir la fonction racine n-ième sur $\mathbb{R}$.

4.1.5 Croissances comparées

Soit a et b deux réels strictement positifs, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(ax)}{x^b}=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}|x|^b\exp(ax)=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^b}{x^a}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}x^a|\ln x|^b=0.$$

4.2 Fonctions trigonométriques réciproques

4.2.1 Fonction Arcsinus

Définition 4.6 *L'application sinus induit une bijection strictement croissante de* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1,1]$. *Son application réciproque est appelée* ***fonction arc sinus*** *et se note* $\arcsin$. *On a donc :*

$$\boxed{y=\arcsin x \Longleftrightarrow x=\sin y \text{ et } -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}}$$

L'application arcsin est donc une bijection strictement croissante de $[-1,1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. D'après les théorèmes sur les fonctions réciproques, la fonction arcsin est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.

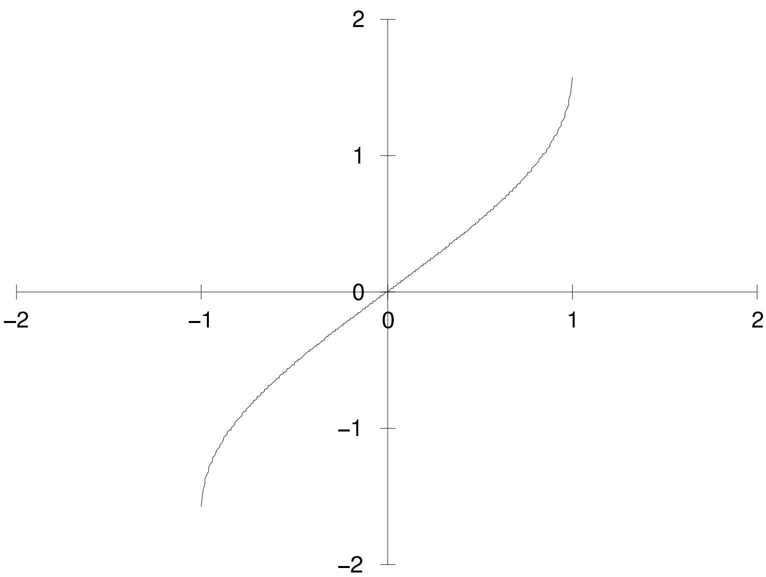
Comme $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$, on a $\cos(\arcsin x)\geqslant 0$ et $\sin(\arcsin x)=x$.

La relation $\cos^2(\arcsin x)+\sin^2(\arcsin x)=1$ fournit donc $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.

Il en résulte que pour $x\in\,]-1,1[$, on a

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction arcsin est symétrique de celle de la fonction sin par rapport à la première bissectrice.



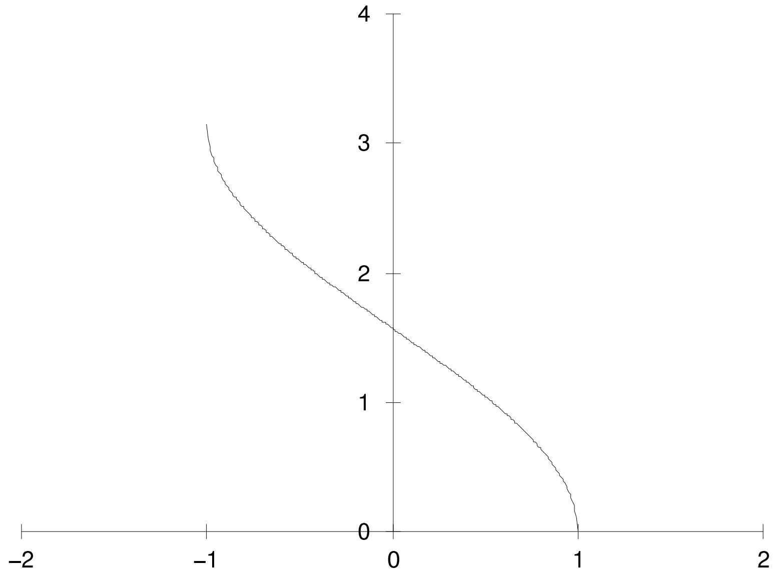
4.2.2 Fonction Arccosinus

Définition 4.7 *L'application cosinus induit une bijection strictement décroissante de* $[0, \pi]$ *sur* $[-1, 1]$. *La fonction réciproque, appelée* ***arc cosinus*** *est notée* arccos. *On a*

$$\boxed{y = \arccos x \Longleftrightarrow x = \cos y \ \textit{ et } \ 0 \leqslant y \leqslant \pi}$$

L'application arccos est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$, de dérivée

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



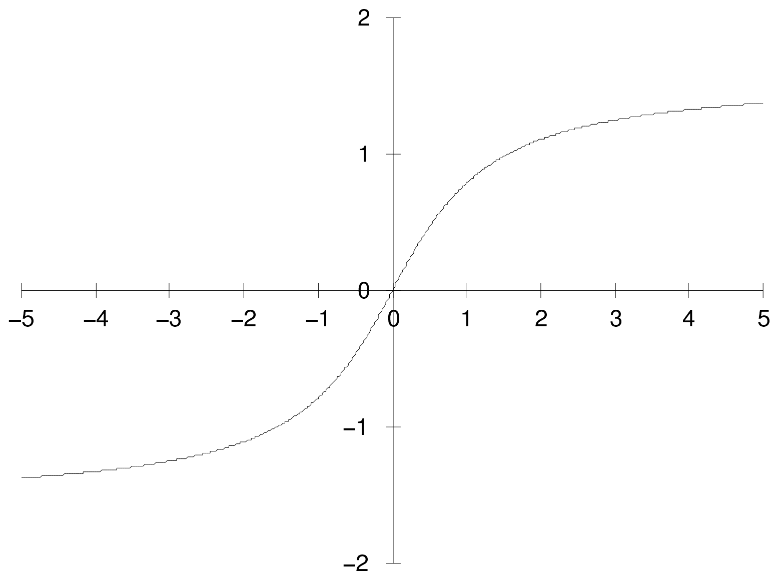
4.2.3 Fonction Arctangente

Définition 4.8 *L'application tangente induit une bijection strictement croissante de* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$. *L'application réciproque est appelée* ***arc tangente****, et se note* arctan. *On a donc :*

$$\boxed{y = \arctan x \Longleftrightarrow x = \tan y \ \textit{ et } \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}}$$

L'application arctan est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$



Chapitre 5

Étude locale des fonctions

Dans tout ce chapitre les fonctions considérées sont définies au voisinage de $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et nous supporserons pour simplifier qu'elles sont toutes définies sur une même partie de partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$. Si de plus $a \in \mathcal{D}$ alors on suppose que toutes ces fonctions sont continues en a.

5.1 Dominance et négligeabilité

5.1.1 Définitions

Définition 5.1 *Soit f et g vérifiant les hypothèses précédentes.*

1. On dit que f est dominée par g au voisinage de a s'il existe une fonction u définie sur $\mathcal{D}$, bornée au voisinage de a telle que $f = gu$ au voisinage de a.
On note alors $f = O(g)$ (lire "f égale grand O de g").

2. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie sur $\mathcal{D}$ telle que $f = g\varepsilon$ au voisinage de a et $\lim x \to a\varepsilon(x) = 0$.
On note alors $f = o(g)$ (lire "f égale petit o de g").

Exemples

1. On a $x^2 \sin \frac{1}{x} = O(x^2)$ au voisinage de 0.
2. On a $x^2 \sin \frac{1}{x} = o(|x|^{\frac{3}{2}})$ au voisinage de 0.
3. On a $x^2 = o(\sin x)$ au voisinage de 0 puisqu'au voisinage de 0 on a $x^2 = \varepsilon(x) \sin x$ où :
$$\varepsilon(x) = \frac{x^2}{\sin x} \text{ si } 0 < |x| < 1 \text{ et } \varepsilon(x) = 0 \text{ sinon}$$
avec donc $lim_{x \to 0}\varepsilon(x) = 0$.
4. Une fonction f est bornée au voisinage de a si, et seulement si, elle est dominée par la fonction constante 1, i.e : $f = O(1)$.
5. Une fonction f tend vers 0 en a, si, et seulement si, elle est négligeable devant la fonction constante 1, i.e : $f = o(1)$.

5.1.2 Propriétés

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & f = o(g) & \Longrightarrow & f & = & O(g) \\
f_1 = O(g) & \text{et} & f_2 = O(g) & \Longrightarrow & f_1 + f_2 & = & O(g) \\
f_1 = O(g_1) & \text{et} & f_2 = O(g_2) & \Longrightarrow & f_1 f_2 & = & O(g_1 g_2) \\
f_1 = o(g) & \text{et} & f_2 = o(g) & \Longrightarrow & f_1 + f_2 & = & o(g) \\
f_1 = o(g_1) & \text{et} & f_2 = O(g_2) & \Longrightarrow & f_1 f_2 & = & o(g_1 g_2) \\
f_1 = o(g_1) & \text{et} & f_2 = o(g_2) & \Longrightarrow & f_1 f_2 & = & o(g_1 g_2) \\
f = O(g) & \text{et} & g = O(h) & \Longrightarrow & f & = & O(h) \\
f = o(g) & \text{et} & g = O(h) & \Longrightarrow & f & = & o(h) \\
f = O(g) & \text{et} & g = o(h) & \Longrightarrow & f & = & o(h) \\
f = o(g) & \text{et} & g = o(h) & \Longrightarrow & f & = & o(h)
\end{array}$$

Propriété 5.1 *Si, au voisinage de a, la fonction f est dominée par une fonction bornée au voisinage de a, alors f est bornée au voisinage de a.*

Si, au voisinage de a, la fonction f est dominée par une fonction qui tend vers 0 en a, alors f tend vers 0 en a.

Si, au voisinage de a, la fonction f est négligeable devant une fonction bornée au voisinage de a, alors f tend vers 0 en a.

Théorème 5.2 *Supposons que g ne s'annule pas sur $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Alors au voisinage de a :*
1. *f est dominée par g si et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.*
2. *f est négligeable devant g si et seulement si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.*

5.2 Fonctions équivalentes

Définition 5.2 *Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$, on dit que f est équivalente à g au voisinage de a, ou équivalente à g en a, s'il existe une fonction h définie sur $\mathcal{D}$, telle que $f = gh$ au voisinage de a et $\lim_{x\to a} h(x) = 1$. On note alors $f \sim g$ ou $f \underset{a}{\sim} g$ (lire "f équivalente à g").*

N.B : on a $f \underset{a}{\sim} g$ si, et seulement si, il existe une fonction ε tendant vers 0 telle que $f = (1+\varepsilon)g$ au voisinage de a, c'est à dire si, et seulement si, $f - g = o(g)$.

Propriété 5.3 *Si f est équivalente à g au voisinage de a, alors g est équivalente à f au voisinage de a. C'est pourquoi on dit alors aussi que f et g sont équivalentes au voisinage de a.*

Propriété 5.4 *Si g ne s'annule pas au voisinage de a alors f équivalente à g au voisinage de a si, et seulement si, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.*

Exemples

1. Si f et g sont deux fonctions strictement positives et équivalentes en a alors $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$ sont équivalentes en a.
2. Au voisinage de 1, on a :

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \sim 3(x-1)$$

et donc :

- $\sqrt[3]{x^3-1} \sim \sqrt[3]{3(x-1)}$.
- $(x^3-1)^\alpha \sim 3^\alpha (x-1)^\alpha$ (attention, sur $]1\,;+\infty[$).

3. Lorsque x tend vers $+\infty$ la quantité $x^3 - 2x^2 + x + 3$ est équivalente à x^3 donc :

$$\sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 3} \sim x^{\frac{3}{2}}$$

Propriété 5.5 *Soit f et g deux fonctions équivalentes en a, si g admet une limite finie ou infinie en a alors f admet une limite en a et ces limites sont égales.*

Propriété 5.6 *Soit f et g deux fonctions équivalentes en a.*
1. Si g est positive sur $\mathcal{D}$ alors f est positive au voisinage de a.
2. Si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$ alors f ne s'annule pas au voisinage de a.
3. Si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}\setminus\{a\}$ alors la restriction de f à $\mathcal{D}\setminus\{a\}$ ne s'annule pas au voisinage de a.

5.2.1 Comment obtenir des équivalents ?

Propriété 5.7 *Soit f une fonction dérivable en a, si $f'(a) \neq 0$ alors au voisinage de a :*

$$f(x) - f(a) \sim f'(a)(x-a)$$

Équivalents usuels en 0

$e^x - 1 \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$
$\sin x \sim x$	$\arcsin x \sim x$
$\tan x \sim x$	$\arctan x \sim x$

Propriété 5.8 *Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$ équivalentes en a. Si u est à valeurs dans $\mathcal{D}$ telle que $\lim_{x\to\alpha} u(x) = a$ alors les fonctions $f \circ u$ et $g \circ u$ sont équivalentes en α.*

Propriété 5.9 (Règles de calcul) *Au voisinage de a :*

1. *Si $f \sim g$ et $g \sim h$ alors $f \sim h$.*
2. *Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.*
3. *Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ et si aucune de ces fonctions ne s'annule sur $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ alors $\dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2}$.*