PROBLÈME : NOMBRES ET POLYNÔMES DE BERNOULLI

Pour tout nombre entier naturel k tel que $0 < k < n$, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi n.

On rappelle que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

On admet, dans tout cet exercice, qu'il existe une unique suite (b_n) définie par la condition initiale $b_0 = 1$ et la relation de récurrence $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$, valable pour tout n entier supérieur ou égal à 2.

On appelle *nombres de Bernoulli* les nombres réels notés b_k ainsi définis.

On appelle *polynômes de Bernoulli* les polynômes $B_n(X)$ définis par :

$$B_0(X) = 1$$

pour tout nombre entier naturel non nul n, $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k X^{n-k}$.

1) Déterminer b_1, b_2, b_3 et b_4.

Montrer en particulier que $b_4 = -\dfrac{1}{30}$.

2) Déterminer les polynômes $B_1(X)$, $B_2(X)$ et $B_3(X)$.

3) Vérifier que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 2 :

$$B_n(0) = B_n(1) = b_n .$$

4) Démontrer que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1 :

$$B_n'(X) = nB_{n-1}(X).$$

5) En déduire que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^1 B_n(t)\,dt = 0 .$$

6) Établir par récurrence que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1 :

$$B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1} ..$$

7) En déduire que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier m tel que m ⩾ 2, on a, on a $\sum_{k=0}^{m} k^n = \dfrac{1}{n+1}\left(B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(0)\right)$. Retrouver alors la formule donnant $\sum_{k=0}^{m} k^2$.

8) On admet dans les questions suivantes que la suite (B_n) est l'unique suite de polynômes vérifiant les propriétés démontrées aux questions 4 et 5 et telle que $B_0(X) = 1$.

Pour tout nombre entier naturel n, on pose : $A_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.

a) Démontrer que la suite (A_n) est confondue avec la suite (B_n).

b) En déduire que pour tout nombre entier p supérieur ou égal à 1, $b_{2p+1} = 0$.

9) Soient n et p deux nombres entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit f une fonction de classe C_{2p+1} sur l'intervalle [0, 1].

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on désigne par $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et on pose par convention $f^{(0)} = f$.

Montrer que, pour tout nombre entier n de l'intervalle [2, 2p + 1], on a :

$$\int_0^1 f^{(n)}(t) B_n(t)\,dt = b_n\left(f^{(n-1)}(1) - f^{(n-1)}(0)\right) - n\int_0^1 f^{(n-1)}(t) B_{n-1}(t)\,dt$$

b) En déduire que, pour tout nombre entier naturel k de l'intervalle [1, p], on a :

$$\frac{1}{(2k+1)!}\int_0^1 f^{(2k+1)}(t) B_{2k+1}(t)\,dt = \frac{-b_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) + \frac{1}{(2k-1)!}\int_0^1 f^{(2k-1)}(t) B_{2k-1}(t)\,dt$$

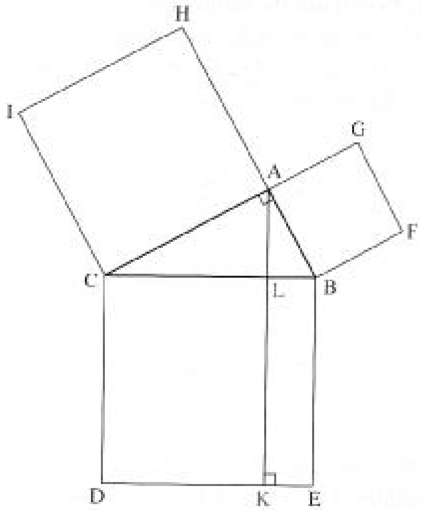
c) Montrer que pour tout entier naturel p non nul, on a :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{p} b_{2k}\frac{f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)}{(2k)!} - \frac{1}{(2p+1)!}\int_0^1 f^{(2k-1)}(t) B_{2k+1}(t)\,dt$$

(première formule d'Euler Mac-Laurin)

PROBLÈME : DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE PYTHAGORE PAR LES AIRES

ABC est un triangle rectangle en *A*. Il s'agit de démontrer que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
Si *ACIH*, *ABFG* et *CDEB* sont les carrés construits respectivement sur les côtés [*AC*], [*AB*] et [*BC*], cela revient à démontrer que l'aire du carré *CBED* est égale à la somme des aires des carrés *ACIH* et *ABFG*.



On appelle *K* le projeté orthogonal de *A* sur (*DE*). La droite (*AK*) coupe (*BC*) en *L*.
1) Établir que les triangles *IBC* et *ACD* sont isométriques.
2) Puisque les deux triangles précédents sont isométriques, ils ont la même aire. Soit *B'* le pied de la hauteur issue de *B*, relative au côté [*IC*], dans le triangle *ICB*.
Justifier que *BB'* = *IH*, Évaluer alors l'aire du triangle *ACB*, et montrer qu'elle vaut la moitié de l'aire du carré *IHAC*.
3) Soit *A'* le pied de la hauteur issue de *A*, relative au côté [*CD*], dans le triangle *CDA*.
Justifier que *AA'* = *DK*. Évaluer alors l'aire du triangle *ACD*, et montrer qu'elle vaut la moitié de l'aire du rectangle *CDKL*.
4) Justifier alors que l'aire du rectangle *CDKL* vaut deux fois l'aire du triangle *ICB*, c'est-à-dire l'aire du carré *ICAH*.
5) En faisant un raisonnement analogue sur les triangles *CBF* et *AEB*, établir que l'aire du rectangle *LKEB* est égale à l'aire du carré *ABFG*.
6) Conclure.