PLANCHE 2 : probabilités

Exercice 1 : Sur le comptoir d'une fête foraine se trouvent 6 cases numérotées de 1 à 6. Un joueur peut placer 1 € sur la case de son choix. Un forain jette 3 dés identiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose l'équiprobabilité d'apparition de chaque face pour chacun des dés.

- Si le numéro de la case apparaît sur un seul des dés, le joueur gagne 2 €.
- Si le numéro apparaît sur deux des dés, le joueur gagne 3 €.
- Si le numéro apparaît sur trois des dés, le joueur gagne 5 €.
- Si le numéro n'apparaît pas du tout, le joueur perd sa mise.

1. Quelle est la probabilité pour un joueur de gagner 2 € ?
2. Quelle est la probabilité pour un joueur de gagner 3 € ?
3. Quelle est la probabilité pour un joueur de gagner 5 € ?
4. Quelle est la probabilité de perdre ?

Exercice 2 : Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires.

1. On extrait simultanément trois boules de cette urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches parmi les trois boules extraites. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et son écart-type.
2. On extrait successivement trois boules de cette urne, en remettant après chaque tirage la boule extraite dans l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages où apparaît une boule blanche. Déterminer la loi de probabilité de Y et son espérance mathématique.

Exercice 3 : Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible a un lancer , la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$. On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère les événements suivants :
A_n : "Alice atteint la cible au $n^{ième}$ coup"
B_n : "Alice rate la cible au $n^{ième}$ coup".
On pose $p_n = P(\mathrm{A}_n)$.
Pour les questions **1.** et **2.** on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré.

1. Déterminer p_1 et montrer que $p_2 = \frac{4}{15}$.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}$$
3. Pour $n \geqslant 1$, on pose
$$u_n = p_n - \frac{3}{13}$$
Montrer que la suite (u_n) est un suite géométrique, dont on précisera le premier terme u_1 et la raison q.
4. Écrire u_n puis p_n en fonction de n.
5. Déterminer $\lim_{n\to\infty} p_n$.