PLANCHE : fonctions à deux variables

Exercice 1 : Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

- $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$
- $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
- $f(x,y) = \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$
- $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

Exercice 2 : Soit un vecteur v de $\mathbb{R}^2$ et une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si la dérivée en 0 de la fonction $t \mapsto f(a+tv)$ existe alors elle est appelée dérivée en a de f suivant le vecteur v, elle est notée $D_v f(a)$.

Soit f définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f possède des dérivées suivant tout vecteur $v = (h,k)$ en $(0,0)$.
2. Démontrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 3 : Répondre aux mêmes questions que dans l'exercice précédent avec la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0 \end{cases}$$

Exercice 4 : Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^1 sur U si ses dérivées partielles existent et sont continues sur U.

Soit f définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0 \end{cases}$$

f est-elle continue ? Est-elle de classe C^1 ?

Exercice 5 : On rappelle le théorème suivant : Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Si f possède un extremum local en $a \in U$, alors ses dérivées partielles en a sont nulles.

Soit f définie par $f(x,y) = x^2+y^2-2x-4y$.
Étudier les éventuels extréma de f.

Exercice 6 : Même question avec :

1. $f(x,y) = x^3+y^3$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $f(x,y) = x^2+y^2+\sin(x^2+y^2)$ sur $[-1\,;1]^2$.
3. $f(x,y) = x^2+3y^2-2x-10y+2xy+6$ sur $\mathbb{R}^2$.