Fiche 1: nombres complexes

Exercice 1 : On considère le complexe $Z = x^2 + y^2 - 4 + i(2x + y + 1)$

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{Q}$ des nombres complexes z tel que Z soit un réel, puis représenter $\mathcal{Q}$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{G}$ des nombres complexes z tel que Z soit un imaginaire pur, puis représenter $\mathcal{G}$

Exercice 2 :

1. Déterminer les formes algébriques des nombres complexes suivants :
   $z_1 = (2 - 6i) - 3(2 - 2i)$; $z_2 = (2 - i)(1 - 2i)$; $z_3 = \frac{2}{2-i}$; $z_4 = \frac{1+i}{1-3i}$
2. Parmis les nombres complexes précédents quels sont ceux qui sont des réels, qui sont des imaginaires purs ?
3. Soit $Z = (1 + i)^n$, $n \in \mathbb{N}$. A quelle condition sur n, Z est-il un réel, Z est-il un imaginaire pur ?

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, on donnera les résultat sous leur forme algébrique.

1. $iz - 2i = (2 - i)z + 1$
2. $\frac{1+iz}{z+i} = 1 + i$
3. $iz + 2\overline{z} = 2i - 3$

Exercice 4 : Module et argument.

1. Déterminer graphiquement le module et un argument des nombres complexes suivants :
   $z_1 = 4i$, $z_2 = -2$, $z_3 = -i$ et $z_4 = 3$.
2. Déterminer par le calcul le module et un argument de $z_5 = 1 - i$ et $z_6 = \sqrt{3} + i$.
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :
   (a) $1 + i$
   (b) $-1 + i$
   (c) $\sqrt{3} - i$
   (d) $-\sqrt{3} + i$

Exercice 5 :

1. Déterminer la forme trigonométrique de $-1 + \sqrt{3}i$
2. Donner le module et un argument du complexe $z = cos\ \frac{\pi}{6} - i\ sin\frac{\pi}{6}$
3. En déduire un module et un argument de $-3z$

Exercice 6 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct.
Quelle est la nature du triangle ABC lorsque $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$?