PLANCHE 1 : fonctions usuelles

Exercice 1 : Pour tout x réel, simplifier les sommes suivantes :

$$A = \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) \text{ et } B = \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$
2. $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$
3. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Exercice 3 : Déterminer la valeur de a, élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sachant que $\tan a = 2 - \sqrt{3}$ (On pourra utiliser $\tan 2a$).

Exercice 4 : Calculer les valeurs de :

$$\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} \text{ et } \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$$

En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$$

Exercice 6 : On désigne par θ le réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
Déterminer la valeur de $\sin\theta$, et en déduire l'expression des solutions de l'équation

$$2\cos x + 4\sin x = \sqrt{15}$$

en fonction de θ.

Exercice 7 : On se propose dans cet exercice d'utiliser les fonctions trigonométriques pour résoudre une équation du troisième degré

1. Exprimer $\cos 3a$ en fonction de $\cos a$, pour $a \in \mathbb{R}$.
2. Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$.
   (a) Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
   (b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
   (c) Justifier que l'on peut poser $\cos\alpha = x$, avec α élément de $]0, \pi[$. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 8 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{3}{4}$$